Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2012
12.03.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2+i} \right)^n$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Realteil sowie den Imaginärteil des Reihenwerts.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n,$$

und bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen diese Potenzreihe konvergiert.

c) Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cos(\arctan(2x))$,

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 - x\sqrt{x^4 - x} \right)$.

Aufgabe 2 (4 + 6 = 10 Punkte)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x} + \log(x^2)) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Geben Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie in diesen Stellen $f'(x_0)$.
Hinweis: $\log = \ln$.

b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 + 3x$.

i) Zeigen Sie, dass $0 \in g(\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie $g(\mathbb{R})$. Zeigen Sie außerdem, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

ii) Nach i) existiert die Umkehrfunktion $g^{-1} : g(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie $g^{-1}(0)$ und zeigen Sie, dass für alle $y \in g(\mathbb{R})$ gilt:

$$(g^{-1})'(0) \geqslant (g^{-1})'(y).$$

iii) Zeigen Sie, dass für alle $y \in g(\mathbb{R})$ mit $y > 0$ gilt:

$$0 < g^{-1}(y) \leqslant \frac{y}{3}.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **($2+2+6=10$ Punkte)**

a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx.$$

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral
$$\int_1^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^4 dx$$
konvergiert und dass der Wert des Integrals im Intervall $[0,1]$ liegt.
Hinweis: Für $y \geqslant 0$ gilt $\sin(y) \leqslant y$.

c) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch
$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{x^n - 2n}{x^n + n}.$$

i) Berechnen Sie für jedes $x \in [0,\infty)$
$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

ii) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[1,2]$ gleichmäßig gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort.

iii) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 **($5+5=10$ Punkte)**

a) Es sei $U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0\}$. Ferner sei $\vec{b}_j := (j+1)\vec{e}_1 - (-1)^j \vec{e}_{j+1}$ für jedes $j \in \{1,2,3\}$, wobei $\vec{e}_j$ den j-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^4$ bezeichne.

i) Zeigen Sie, dass $U = \operatorname{lin}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ gilt, und begründen Sie, dass die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ eine Basis von U bilden.

ii) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

b) Durch $V := \operatorname{lin}\{\sinh, \cosh\}$ wird ein Untervektorraum von $C^1(\mathbb{R})$ definiert, und durch $\phi : V \to V,\ \phi(f) := 3f - f'$ wird eine lineare Abbildung auf V definiert.

i) Geben Sie eine Basis B von V an. Begründen Sie, dass es sich dabei um eine Basis von V handelt.

ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von ϕ bezüglich der Basis B aus i).

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Freitag, den 30.03.2012, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 18.04.2012, von 15:45 bis 17:30 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 23.04.2012 bis 27.04.2012 im Allianz-Gebäude 05.20.