Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2012
12.03.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Bei der gegebenen Reihe handelt es sich um eine geometrische Reihe. Da $|\frac{2}{2+i}| = \frac{2}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ ist, konvergiert diese Reihe. Der Wert der Reihe ist gegeben durch

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2+i}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{2+i}} - 1 = \frac{2+i}{2+i-2} - 1 = -2i.$$

Somit ist $\mathrm{Re}(s) = 0$ und $\mathrm{Im}(s) = -2$.

b) Wir setzen $a_n := \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard berechnet sich der Konvergenzradius R der Potenzreihe durch

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ist also $\frac{1}{R} = e$. D.h. die Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $R = e^{-1}$; sie konvergiert für alle $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.
Untersuchung der Randpunkte: Da die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und gegen e konvergiert, gilt

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} \leqslant 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist

$$0 < \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (e^{-1})^n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert folglich auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(e^{-1})^n$. Da die Koeffizienten a_n der Potenzreihe positiv sind, folgt aus der Konvergenz obiger Reihe, wiederum mit Hilfe des Majorantenkriteriums, auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(-e^{-1})^n$.
Insgesamt erhalten wir: Die gegebene Potenzreihe konvergiert genau für alle $x \in [-e^{-1}, e^{-1}]$.

c) **(i)** Es gilt $\lim_{x\to\infty} \arctan(2x) = \frac{\pi}{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Nach der Regel von de l'Hospital (Fall „$\frac{0}{0}$") ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} x\cos(\arctan(2x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\arctan(2x))}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin(\arctan(2x)) \cdot \frac{2}{1+(2x)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sin(\arctan(2x))}{\frac{1}{x^2}+4} = \frac{1}{2},$$

da $\lim_{x\to\infty} \sin(\arctan(2x)) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ gelten. Zu beachten ist dabei, dass die Existenz des zu untersuchenden Grenzwertes aus der Existenz des letzten Grenzwertes folgt.

(ii) Für jedes $x > 1$ gilt

$$\begin{aligned} x^3 - x\sqrt{x^4 - x} &= \left(x^3 - x\sqrt{x^4 - x}\right) \cdot \frac{x^3 + x\sqrt{x^4 - x}}{x^3 + x\sqrt{x^4 - x}} = \frac{x^6 - x^2(x^4 - x)}{x^3 + x\sqrt{x^4(1 - 1/x^3)}} \\ &= \frac{x^3}{x^3 + x^3\sqrt{1 - 1/x^3}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 1/x^3}}. \end{aligned}$$

Wegen $1/x^3 \to 0$ für $x \to \infty$ existiert der zu untersuchende Grenzwert nach den Grenzwertsätzen und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - x\sqrt{x^4 - x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 1/x^3}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 0}} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2

a) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar (man beachte dabei, dass $\log(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und differenzierbar ist). Die Ableitung in diesen Punkten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos(\frac{1}{x} + \log(x^2)) - x^2 \sin(\frac{1}{x} + \log(x^2))(-\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2}) \\ &= 2x\cos(\frac{1}{x} + \log(x^2)) + (1 - 2x)\sin(\frac{1}{x} + \log(x^2)), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Um die Differenzierbarkeit von f im Punkt $x_0 = 0$ zu untersuchen, betrachten wir den Differenzenquotienten. Für jedes $h \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \left|h\cos(\frac{1}{h} + \log(h^2))\right| = |h| \left|\cos(\frac{1}{h} + \log(h^2))\right| \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

da $|\cos(y)| \leqslant 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Folglich ergibt sich $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$, d.h. f ist auch in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

b) **(i)** Wegen $g(0) = 0$ ist $0 \in g(\mathbb{R})$. Da $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $g(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ gilt und die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ist. Außerdem gilt $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass g auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. Folglich ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und es existiert die Umkehrfunktion $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Aus $g(0) = 0$ und der Existenz der Umkehrfunktion ergibt sich $g^{-1}(0) = 0$. Da g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion auch g^{-1} auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{3(g^{-1}(y))^2 + 3} \leqslant \frac{1}{3} \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Wegen $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(g^{-1}(0))^2+3} = \frac{1}{3}$ folgt hieraus die zu zeigende Ungleichung

$$(g^{-1})'(0) \geqslant (g^{-1})'(y) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

(iii) Aus (ii) folgt für alle $s > 0$ die Ungleichung $0 < (g^{-1})'(s) \leqslant \frac{1}{3}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt hieraus für alle $y > 0$

$$0 < g^{-1}(y) = \int_0^y (g^{-1})'(s)\, ds \leqslant \int_0^y \frac{1}{3}\, ds = \frac{y}{3}.$$

Alternative Begründung: Aufgrund der Monotonie von g und g^{-1} gilt: $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Setzt man $y := g(x)$ für $x > 0$, so ist die zu zeigende Ungleichung äquivalent zu

$$0 < x \leqslant \frac{x^3 + 3x}{3}$$

für alle $x > 0$. Diese Ungleichung ist erfüllt, da für alle $x > 0$ gilt

$$\frac{x^3 + 3x}{3} = \frac{x^3}{3} + x \geqslant x.$$

Aufgabe 3

a) Die Substitution $x = u^2,\ dx = 2u\,du$ und anschließende partielle Integration führen auf

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx = 2\int_0^{\pi} u\sin(u)\,du = 2\left([-u\cos(u)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(u)\,du\right)$$
$$= 2[-u\cos(u)]_0^{\pi} + 2[\sin(u)]_0^{\pi} = 2[-\pi\cdot(-1) - 0] + 2\cdot 0 = 2\pi.$$

b) Für alle $x \in [1,\infty)$ gilt $0 \leqslant 1/\sqrt{x} \leqslant 1$, also $0 \leqslant \sin(1/\sqrt{x}) \leqslant \sin 1$, und somit nach Hinweis

$$0 \leqslant \left(\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = \frac{1}{x^2}.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent ist, ist nach dem Majorantenkriterium auch das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 dx$ konvergent. Außerdem gilt für alle $r > 1$

$$0 \leqslant \int_1^r \left(\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 dx \leqslant \int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^r = 1 - \frac{1}{r} \leqslant 1.$$

Führt man den Grenzübergang $r \to \infty$ durch, so lässt sich aus dieser Ungleichung ablesen, dass der Wert des uneigentlichen Integrals im Intervall $[0,1]$ liegt.

c) **(i)** Für jedes $x \in [0,1]$ gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n} = 0$ und somit

$$f_n(x) = \frac{x^n - 2n}{x^n + n} = \frac{\frac{x^n}{n} - 2}{\frac{x^n}{n} + 1} \xrightarrow{n\to\infty} -2.$$

Für jedes $x > 1$ gilt andererseits $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^n} = 0$, woraus

$$f_n(x) = \frac{x^n - 2n}{x^n + n} = \frac{1 - \frac{2n}{x^n}}{1 + \frac{n}{x^n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

folgt. Zusammengefasst gilt also

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -2, & x \in [0,1], \\ 1, & x \in (1,\infty). \end{cases}$$

(ii) Da f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf $[1,2]$ ist, jedoch die Funktion $f : [1,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ nicht stetig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[1,2]$ nicht gleichmäßig gegen f.

(iii) Für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n - 2n}{x^n + n} + 2\right| = \left|\frac{x^n - 2n + 2x^n + 2n}{x^n + n}\right| = \frac{3x^n}{x^n + n} \leqslant \frac{3}{n}.$$

Wegen $\frac{3}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f auf $[0,1]$.

Aufgabe 4

a) **(i)** Es ist $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 4\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$. Wegen $2 + (-2)\cdot 1 = 3 + 3\cdot(-1) = 4 + (-4)\cdot 1 = 0$ gilt $\vec{b}_j \in U$ für jedes $j \in \{1,2,3\}$. Außerdem sind die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ linear unabhängig: Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ und gilt $\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \alpha_3\vec{b}_3 = \vec{0}$, so folgt durch

Betrachtung der zweiten bis vierten Vektorkomponente direkt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gelten muss.
Definiert man nun $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, so ist $U = \text{Kern } A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\}$. Insbesondere ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Da $A \neq 0$ ist, ist $\dim \text{Bild } A = \dim\{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^4\} = 1$. Nach der Dimensionsformel folgt $\dim U = \dim \text{Kern } A = 4 - \dim \text{Bild } A = 3$. Da $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ drei linear unabhängige Vektoren aus U sind, bilden diese eine Basis von U. Hieraus folgt auch $U = \text{lin}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

(ii) Es gilt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + 4\vec{b}_3.$$

Somit besitzt $\vec{v}$ die Koordinaten $-3, -2, 4$ bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

b) (i) Wir zeigen, dass $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear unabhängig sind: Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \sinh + \beta \cosh = 0$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha \sinh(x) + \beta \cosh(x) = 0.$$

Setzen wir $x = 0$, so folgt $\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0$, also $\beta = 0$. Setzen wir andererseits $x = 1$ und verwenden, dass $\beta = 0$ ist, so folgt $0 = \alpha \sinh 1 = \alpha \cdot \frac{1}{2}(e - e^{-1})$, also auch $\alpha = 0$. Damit ist gezeigt, dass $\sinh, \cosh$ linear unabängig sind. Wegen $V = \text{lin}\{\sinh, \cosh\}$ bilden also $\sinh, \cosh$ eine Basis von V.

(ii) Es gilt

$$\phi(\sinh) = 3\sinh - \cosh, \qquad \phi(\cosh) = 3\cosh - \sinh.$$

Hieraus lesen wir ab: Die Darstellungsmatrix A von ϕ bezüglich der Basis $\sinh, \cosh$ ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$