Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
04.03.2013

Klausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((4+3+3) Punkte)

a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Geben Sie entweder eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, so ist $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ stetig differenzierbar.

ii) Ist $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

iii) Für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\,(2-(x-1)^2)$ gilt $\sup\{f(x):\,x\in\mathbb{R}\}>0$.

iv) Ist $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ stetig, so ist $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ streng monoton wachsend.

b) Sei $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $g'(0)=0$. Entscheiden Sie wieder, welche der folgenden Aussagen wahr und welche nicht wahr sind, und geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) $g''(0)\leqslant 0 \Rightarrow g$ hat im Nullpunkt ein lokales Maximum.

ii) $g''(0)>0 \Rightarrow g(0)=\min\limits_{x\in[-1,1]} g(x)$.

iii) $g(0)=\min\limits_{x\in(-1,1)} g(x) \Rightarrow g''(0)\geqslant 0$.

c) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r,\varphi\in\mathbb{R}$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$:

i) $\frac{2+2i}{3-3i}$ ii) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)^{2013}$ (*Hinweis:* Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.)

Aufgabe 2 ((2+3+5) Punkte)

a) Bestimmen Sie die Menge aller $x\in(-\pi,\pi)$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sin x)^n$$

konvergiert.

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k+3}-\frac{\cos(k\pi)}{k+2}\right)$$

auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

c) i) Seien $x,y>0$. Zeigen Sie die Ungleichung $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$.

ii) Für alle $k\in\mathbb{N}$ sei $a_k>0$. Zeigen Sie für alle $n\in\mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geqslant n^2.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 ((4+6) Punkte)

a) Berechnen Sie in i) und ii) jeweils die Ableitung von f für $x \in (0, \infty)$:

i) $f(x) = e^{\sin \sqrt{x}}$

ii) $f(x) = x^\alpha \log \frac{1}{x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}$ fest)

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int_1^a \cos(\log x)\, dx$ $(a > 1)$

ii) $\int_0^1 \frac{3x}{x^2-x-2}\, dx$

Aufgabe 4 ((3+4+3) Punkte)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Untersuchen Sie die Folge

$$x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

i) Für $a < b$ sei $[a, b]$ ein Intervall, das den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert.

ii) Für $c < d$ sei $[c, d]$ ein Intervall mit $0 \in [c, d]$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[c, d]$ nicht gleichmäßig konvergiert.

c) Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\cos x$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = x$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, **26.03.2013**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1phys2012w/

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den **17.04.2013**, von 16.00 bis 18.00 Uhr im Benz Hörsaal (Geb. 10.21) statt.