Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2012/13
Institut für Analysis 04.03.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Klausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((4+3+3) Punkte)

a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Geben Sie entweder eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, so ist $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ stetig differenzierbar.

ii) Ist $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

iii) Für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(2-(x-1)^2\right)$ gilt $\sup\{f(x):\,x\in\mathbb{R}\}>0$.

iv) Ist $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ stetig, so ist $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ streng monoton wachsend.

b) Sei $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $g'(0)=0$. Entscheiden Sie wieder, welche der folgenden Aussagen wahr und welche nicht wahr sind, und geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) $g''(0)\leqslant 0 \Rightarrow g$ hat im Nullpunkt ein lokales Maximum.

ii) $g''(0)>0 \Rightarrow g(0)=\min\limits_{x\in[-1,1]} g(x)$.

iii) $g(0)=\min\limits_{x\in(-1,1)} g(x) \Rightarrow g''(0)\geqslant 0$.

c) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r,\varphi\in\mathbb{R}$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$:
i) $\frac{2+2i}{3-3i}$ ii) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)^{2013}$ (*Hinweis:* Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.)

Lösung:

a) i) Die Aussage ist wahr: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist F differenzierbar und es gilt $F'=f$. Da f stetig ist, ist F also stetig differenzierbar.

ii) Die Aussage ist falsch: Die Abbildung $f(x)=\frac{1}{x}$ ist stetig, jedoch nicht beschränkt.

iii) Die Aussage ist wahr: Es gilt $f(0)=1$, also $\sup\{f(x):\,x\in\mathbb{R}\}\geqslant 1>0$.

iv) Die Aussage ist wahr: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $F'(x)=f(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Damit ist F streng monoton wachsend.

b) i) Die Aussage ist falsch: Für $g(x)=x^3$ gilt $g'(0)=0$, $g''(0)=0$, jedoch hat g im Nullpunkt kein lokales Extremum.

ii) Die Aussage ist falsch: Für $g(x)=2x^3+x^2$ gilt $g'(x)=6x^2+2x$, $g''(x)=12x+2$, also $g'(0)=0$, $g''(0)=2>0$. Jedoch gilt $g(0)=0$, $g(-1)=-1\geqslant\min\limits_{x\in[-1,1]} g(x)$.

iii) Die Aussage ist wahr: Aus $g(0)=\min\limits_{x\in(-1,1)} g(x)$ folgt, dass g in 0 ein lokales Minimum hat. Nach Vorlesung sind $g'(0)=0$ und $g''(0)\geqslant 0$ notwendige Voraussetzungen für das Vorliegen eines lokalen Minimums.

c) i)

$$\begin{aligned}\frac{2+2i}{3-3i} &= \frac{2}{3}\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2i}{2}\\ &= \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)^{2013} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{2013}\\ &= e^{i\frac{\pi}{6}\cdot 2013}\\ &= e^{i(167\cdot 2\pi+\frac{3}{2}\pi)}\\ &= e^{i\frac{3}{2}\pi}\end{aligned}$$

Aufgabe 2 ((2+3+5) Punkte)

a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in (-\pi, \pi)$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n$$

konvergiert.

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k+3} - \frac{\cos(k\pi)}{k+2}\right)$$

auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

c) i) Seien $x, y > 0$. Zeigen Sie die Ungleichung $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.

ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k > 0$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

Lösung:

a) Für $x \in (-\pi, \pi)$ setze $q := \sin x$. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

eine geometrische Reihe, die genau für $|q| < 1$, also für $-1 < \sin x < 1$ konvergiert. Mit der letzten Ungleichung ist die Reihe also genau für $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ konvergent.

b) Es gilt

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^k}{k+3} - \frac{\cos(k\pi)}{k+2} &= (-1)^k \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2}\right)\\ &= (-1)^k \frac{k+2-(k+3)}{(k+3)(k+2)}\\ &= (-1)^k \frac{-1}{(k+3)(k+2)},\end{aligned}$$

und damit

$$\left|\frac{(-1)^k}{k+3} - \frac{\cos(k\pi)}{k+2}\right| = \frac{1}{(k+3)(k+2)} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist nach Vorlesung konvergent. Nach dem Majorantenkriterium ist damit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k+3} - \frac{\cos(k\pi)}{k+2}\right)$ absolut konvergent. Da aus absoluter Konvergenz die gewöhnliche Konvergenz folgt, ist die Reihe also auch konvergent.

c) i) Es gilt $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$, also $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Wir teilen diese Ungleichung durch $xy > 0$ und erhalten $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.

ii) Wir zeigen die Ungleichung mittels Induktion über n. Für $n = 1$ gilt

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1 \geqslant 1^2.$$

Sei die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k}\right) &= \left(a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+1}}{a_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{n+1}} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \\
&\overset{\text{IV}}{\geqslant} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{n+1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{n+1}}\right) + n^2 \\
&\overset{\text{i)}}{\geqslant} 1 + 2n + n^2 \\
&= (n+1)^2,
\end{aligned}$$

womit der Induktionsbeweis beendet ist.

Aufgabe 3 ((4+6) Punkte)

a) Berechnen Sie in i) und ii) jeweils die Ableitung von f für $x \in (0, \infty)$:

i) $f(x) = e^{\sin\sqrt{x}}$

ii) $f(x) = x^\alpha \log \frac{1}{x}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R}$ fest)

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int_1^a \cos(\log x)\, dx \quad (a > 1)$

ii) $\int_0^1 \frac{3x}{x^2 - x - 2}\, dx$

Lösung:

a) i)

$$f'(x) = e^{\sin\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}\,) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ii)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha\, x^{\alpha-1} \log\frac{1}{x} + x^\alpha \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \alpha\, x^{\alpha-1} \log\frac{1}{x} - x^{\alpha-1} \\
&= x^{\alpha-1}\left(\alpha \log\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

b) i) Die Substitution $y = \log x$ führt auf $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^y}$ und damit auf

$$\int_1^a \cos(\log x)\, dx = \int_0^{\log a} e^y \cos y\, dy.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log a} e^y \cos y\, dy &= [e^y \cos y]_0^{\log a} + \int_0^{\log a} e^y \sin y\, dy \\
&= [e^y \cos y]_0^{\log a} + [e^y \sin y]_0^{\log a} - \int_0^{\log a} e^y \cos y\, dy,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^{\log a} e^y \cos y \, dy &= \frac{1}{2}\left([e^y \cos y]_0^{\log a} + [e^y \sin y]_0^{\log a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a \cos(\log a) - 1 + a \sin(\log a)\right).\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_1^a \cos(\log x)\, dx = \frac{1}{2} a(\cos(\log a) + \sin(\log a)) - \frac{1}{2}.$$

ii) Die Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ führt auf die Lösungen $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x^2 - x - 2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \\ &= \frac{(A+B)x + (B-2A)}{x^2 - x - 2}.\end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem $A + B = 3$, $B - 2A = 0$ liefert $A = 1$, $B = 2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x}{x^2 - x - 2}\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x-2}\, dx \\ &= [\log(x+1)]_0^1 + 2[\log(|x-2|)]_0^1 \\ &= \log 2 - 0 + 2(0 - \log 2) \\ &= -\log 2.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 ((3+4+3) Punkte)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Untersuchen Sie die Folge

$$x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

i) Für $a < b$ sei $[a, b]$ ein Intervall, das den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert.

ii) Für $c < d$ sei $[c, d]$ ein Intervall mit $0 \in [c, d]$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[c, d]$ nicht gleichmäßig konvergiert.

c) Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\cos x$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = x$.

Lösung:

a) Wegen $0 < a < b$ gilt $b^n \leqslant a^n + b^n \leqslant 2b^n$, also

$$b \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{2}\, b.$$

Nach Vorlesung gilt $\sqrt[n]{2} \to 1$ für $n \to \infty$. Damit liegt x_n zwischen zwei konvergenten Folgen mit demselben Grenzwert b. Es folgt, dass auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $x_n \to b$ für $n \to \infty$.

b) i) Wir zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Gelte zunächst $0<a<b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-0| &= \sup_{x\in[a,b]}|nxe^{-nx^2}|\\ &\leqslant nbe^{-na^2}\\ &= \frac{b}{a^2}(na^2)e^{-na^2}\to 0 \quad \text{für } n\to\infty.\end{aligned}$$

Dabei wurde $\lim_{y\to\infty} ye^{-y}=0$ verwendet. Gilt $a<b<0$, schätzt man analog ab

$$\sup_{x\in[a,b]}|nxe^{-nx^2}|\leqslant n|a|e^{-nb^2}=\frac{|a|}{b^2}(nb^2)e^{-nb^2}$$

und folgert wie oben die gleichmäßige Konvergenz gegen die Nullfunktion.

ii) Wegen $f_n(0)=0$ und dem Ergebnis aus i) konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Es gilt $d>0$ oder $c<0$. Gelte zunächst $d>0$. Sei $\varepsilon:=\frac{1}{2}$. Dann gilt $\frac{1}{n}<d$ für n hinreichend groß und

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=e^{-\frac{1}{n}}>\frac{1}{2}$$

für n hinreichend groß (wähle beispielsweise $n>\frac{1}{\log 2}$). Folglich gibt es für $\varepsilon=\frac{1}{2}$ für jedes $N\in\mathbb{N}$ ein $n\geqslant N$ und ein $x\in[c,d]$ mit $|f_n(x)-0|>\varepsilon$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig auf $[c,d]$. Gilt $c<0$, so betrachte $f_n(-\frac{1}{n})$ und argumentiere analog.

c) Es gilt $f(x)=x$ genau dann, wenn $g(x):=x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\cos x=0$. Weiterhin ist $g(-1)=-1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(-1)<0$, $g(1)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 1\geqslant 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}>0$. Da g als Summe stetiger Funktionen stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x\in(-1,1)$ mit $g(x)=0$, also mit $f(x)=x$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, beachten wir, dass g auf $(-1,1)$ differenzierbar und auf $[-1,1]$ stetig ist. Es gilt $g'(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin x\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>0$. Also ist g auf $[-1,1]$ streng monoton wachsend und es gibt damit höchstens ein x mit $g(x)=0$, also mit $f(x)=x$.