Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS 2013/14
06.03.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: (3+3+4 Punkte)

(a) Sei $x_0 = \frac{1}{4}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n = 2(x_{n-1})^2$. Zeigen Sie

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Untersuchen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Reihenwert:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) x^{2n}$$

Aufgabe 2: ((1 + 3 + 2) + (1 + 2 + 2) Punkte)

(a) Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 - 1 - \frac{1}{4}\sin(2x) \qquad \forall x \in [-2, 2]$$

gegeben.

(i) Begründen Sie, dass f eine Minimalstelle auf $[-2, 2]$ hat, d.h. es existiert ein $x^* \in [-2, 2]$ mit

$$f(x^*) = \min\{f(x) : x \in [-2, 2]\}.$$

(ii) Berechnen Sie f' und zeigen Sie, dass f' genau eine Nullstelle auf $[-2, 2]$ besitzt.

(iii) Zeigen Sie, dass f nur in x^* sein Minimum auf $[-2, 2]$ annimmt.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion

$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = e^{x-n} \quad \forall x \in [0, \infty)$$

gegeben.

Untersuchen Sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf

(i) punktweise Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion,

(ii) gleichmäßige Konvergenz auf $[0, 1]$, sowie

(iii) gleichmäßige Konvergenz auf $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: ((3 + 3) + (2 + 2) Punkte)
Die Aufgaben 3 (a) und (a') sind alternativ gestellt. Es wird nur die Bearbeitung **einer** dieser Aufgaben gewertet.

(a) (Empfohlen für die Hörerinnen und Hörer von Prof. R. Schnaubelt)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(i) $u'(t) = e^{u(t)} \cos(t) \quad (t \geq 0), \qquad u(0) = -1,$

(ii) $u'(t) = 3u(t) + e^{2t} \quad (t \geq 0), \qquad u(0) = 1.$

(a') (Empfohlen für die Hörerinnen und Hörer von Prof. T. Lamm)

(i) Bestimmen Sie Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$, so dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$x + \mathrm{i}y = \frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}, \qquad r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \right)^7.$$

Hinweis: Es ist $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

(ii) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^\alpha \sin(x) \quad \forall x \in (0,1)$$

Lipschitz-stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $\lim_{x \to 0} (1 + \tan(x))^{\frac{2}{x}}$,

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cosh(2x))}{\log(\cosh(3x))}$.

Aufgabe 4: ((2 + 2 + 2) + (2 + 2) Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale

(i) $\int_1^2 \frac{\log(t)}{t^2} \mathrm{d}t$,

(ii) $\int_0^{\sqrt{\log\left(\frac{2}{\pi}\right)}} te^{-t^2} \sin\left(e^{-t^2}\right) \mathrm{d}t$,

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin(t) \mathrm{d}t$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz

(i) $\int_0^\infty \frac{e^t}{1+e^{2t}} \mathrm{d}t$,

(ii) $\int_1^\infty \frac{1 + \frac{1}{2}\sin^{2014}(t)}{t} \mathrm{d}t$.

Viel Erfolg!

Die Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **16.04.2014**, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal (Gebäude 10.21) statt.