Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS 2013/14
16.04.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1:

(a) Beweis durch Vollständige Induktion:

- *IA*: Für $n = 0$ gilt:

$$x_0 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}$$

- *IS*: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV*:

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

Dann gilt für $n+1$:

$$x_{n+1} \overset{\text{Voraus.}}{=} 2x_n^2 \overset{\text{IV}}{=} 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

$\square$

(b) Zwei Lösungvorschläge:

- Es gilt:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{n-k}} \cdot \frac{1}{3^k} \overset{\text{Cauchy-Prod.}}{=} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}\right) \cdot \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k}\right)$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$ konvergiert absolut. Für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Als Cauchy-Produkt-Quadrat, konvergiert deshalb auch $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ (absolut) und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

- Die Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} x^n$ hat Konvergenzradius 1 und definiert durch

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

für alle $|x| < 1$ die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.
Es ist $f \in C^1((-1,1))$ mit (Quotientenregel)

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

für alle $|x| < 1$. Nach dem Satz über Ableitung von Potenzreihen („gliedweises Differenzieren") gilt aber, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} \overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$$

Konvergenzradius 1 hat und

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

für alle $|x| < 1$ gilt.
Einsetzten von $-1 < x = \frac{1}{3} < 1$ liefert, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ konvergent ist und der Reihenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = f'\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

beträgt.

(c) Es ist

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) x^{2n} = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(\frac{x^2}{2^2}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) y^n$$

mit $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Ferner für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \overset{(k=1)}{\leq} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}}_{\leq 1}} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Deshalb folgt für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe in y:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} = 1$$

Damit ist $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) y^n$ für $|y| < \rho = 1$ konvergent und für $|y| > 1$ divergent.
Wegen

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Damit divergiert die Potenzreihe in $y = 1$:

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} y^n \overset{\text{für } y=1}{=} \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Schließlich ist

$$|y| = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = y \begin{cases} < 1 & \Leftrightarrow |x| < 2 \\ = 1 & \Leftrightarrow |x| = 2 \\ > 1 & \Leftrightarrow |x| > 2 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist die Potenzreihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) x^{2n}$$

genau für $-2 < x < 2$ konvergent.

Aufgabe 2:

(a) (i) Klar: f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[-2,2]$. Damit nimmt f dort sein Maximum und Minimum an.

(ii) Klar: f ist differenzierbar auf $[-2,2]$ und es gilt

$$f'(x) = 2x - \frac{\cos(2x)}{2}$$

für alle $x \in [-2,2]$. Es gilt ferner:

$$f'(0) = -\frac{\cos(2\cdot 0)}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \qquad f'(2) = 2\cdot 2 - \frac{\cos(2\cdot 2)}{2} = 4 - \frac{\cos(4)}{2} \geq 3 > 0$$

Da f' stetig, ja sogar differenzierbar, auf $[-2,2]$ ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [0,2] \subseteq [-2,2]$ mit $f'(x_0) = 0$.

Schließlich gilt

$$f''(x) = 2 + \underbrace{\sin(2x)}_{\geq -1} \geq 1 > 0$$

für alle $x \in [-2,2]$. Also ist f' (Korollar des Mittelwertsatzes) streng monoton wachsend auf $[-2,2]$ und damit injektiv. Deshalb ist x_0 die einzige Nullstelle von f' auf $[-2,2]$.

$\square$

(iii) Sei $x^* \in [-2,2]$ eine Minimalstelle von f auf $[-2,2]$, also $f(x^*) = \min\{f(x) : x \in [-2,2]\}$ (eine solche existiert nach Teilaufgabe (i)). Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0^2 - 1 - \frac{1}{4}\sin(2\cdot 0) = -1 \geq \min\{f(x) : x \in [-2,2]\} \\
f(-2) &= (-2)^2 - 1 - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(-2\cdot 2)}_{\geq -1} \geq 3 - \frac{1}{4} > 2 > -1 \\
f(2) &= 2^2 - 1 - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2\cdot 2)}_{\geq -1} \geq 3 - \frac{1}{4} > 2 > -1
\end{aligned}$$

Also ist $x^* \notin \{-2,2\}$, bzw. $x^* \in (-2,2)$. Damit muss $f'(x^*) = 0$ gelten. Nach Teilaufgabe (ii) hat f' aber genau eine Nullstelle x_0 auf $[-2,2]$. Damit ist $x^* = x_0$ die einzige Minimalstelle von f auf $[-2,2]$.

$\square$

(b) (i) Es gilt für alle $x \in [0,\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} e^{x-n} = \lim_{n\to\infty} e^x \cdot e^{-n} = e^x \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-n} = e^x \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,\infty)$.

(ii) Wegen der Monotonie der e-Funktion, gilt für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{x-n} = e^x \cdot e^{-n} \leq e^1 \cdot e^{-n} = e \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n =: a_n$$

Wegen $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, ist die Konvergenz gleichmäßig auf $[0,1]$.

(iii) Setze $x_n := n \in \left[\frac{1}{2},\infty\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = e^{x_n - n} - 0 = e^{n-n} = e^0 = 1$$

Also ist die Konvergenz auf $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ nicht gleichmäßig.

Aufgabe 3:

(a) (i) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen:

$$e^{-u}\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$$

Bestimmte Integration liefert die Lösungsformel für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_{u(0)}^{u(t)} e^{-v}\mathrm{d}v &= \int_0^t \cos(s)\mathrm{d}s \\
\Rightarrow \left[-e^{-v}\right]_{v=u(0)}^{v=u(t)} &= [\sin(s)]_{s=0}^{s=t} \\
\Rightarrow e^{-(-1)} - e^{-u(t)} &= \sin(t) \\
\Rightarrow e - \sin(t) &= e^{-u(t)} \\
\Rightarrow e^{u(t)} &= \frac{1}{e-\sin(t)} \\
\overset{e-\sin(t)>0}{\Rightarrow} \log\left(e^{u(t)}\right) &= \log\left(\frac{1}{e-\sin(t)}\right) \\
\Rightarrow u(t) &= \log\left(\frac{1}{e-\sin(t)}\right)
\end{aligned}$$

(ii) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösungsformel (Variation der Konstanten) liefert

$$\begin{aligned}
u(t) &= 1 \cdot e^{3t} + e^{3t} \cdot \int_0^t e^{-3s}e^{2s}\mathrm{d}s = e^{3t} + e^{3t} \cdot \int_0^t e^{-s}\mathrm{d}s \\
&= e^{3t} + e^{3t} \cdot \left[-e^{-s}\right]_{s=0}^{s=t} = 2e^{3t} - e^{2t}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

(a') (i) Es gilt

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{1}{4}\left[\left(1-\sqrt{3}\right) - \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$$

und folglich ist $x = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$, $y = -\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Weiterhin ist nach dem Hinweis $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ und folglich ist

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wegen $\sin(x) > 0$ für alle $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \ni \frac{\pi}{3}$ ist $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deshalb folgt

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^7 &= (-1)^7 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^7 = (-1) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^7 \\
&= (-1) \cdot \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^7 = e^{\mathrm{i}\pi} \cdot e^{\mathrm{i}\pi\frac{7}{3}} = e^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\pi\frac{7}{3}} = e^{\mathrm{i}\pi\frac{10}{3}} \overset{\text{Periodizität}}{=} e^{\mathrm{i}\pi\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

Also ist $r = 1$ und $\varphi = \pi \cdot \frac{4}{3}$.

(ii) Klar: für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar. Also ist f genau dann Lipschitz-stetig, wenn die Ableitung f' beschränkt ist. Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \alpha x^{(\alpha-1)}\sin(x) + x^\alpha\cos(x) = x^\alpha\left(\alpha\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\right)$$

für alle $x \in (0,1)$. Wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\underbrace{x}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

lässt sich f' für $\alpha > 0$ zu der stetigen Funktion $h_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ f'(x) & \text{für } x \in (0,1) \\ \alpha \sin(1) + \cos(1) & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

fortsetzen. Da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind, ist f' in diesem Fall beschränkt. Für $\alpha = 0$ ist $f' = \cos$ und damit ebenfalls beschränkt.

Sei nun $\alpha < 0$ und $\beta = -\alpha > 0$. Es ist $\lim_{x\to 0+} \cos(x) + \alpha\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \beta \neq 0$. Für $\beta \neq 1$ ist also

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \frac{\cos(x) - \beta\frac{\sin(x)}{x}}{x^\beta} = \infty$$

und f' damit unbeschränkt. Für $\beta = 1$ ist hingegen

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f'(x) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x) - \frac{\sin(x)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\overbrace{x\cos(x) - \sin(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x) - x\sin(x) - \cos(x)}{\underbrace{2x}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{\sin(x)}{2} = 0 \end{aligned}$$

und f' lässt sich wieder zur stetigen Funktion $h_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ f'(x) & \text{für } x \in (0,1) \\ \alpha \cos(1) - \sin(1) & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

fortsetzen. Wie im Fall $\alpha > 0$, ist auch hier f' beschränkt.

Zusammenfassend: f ist genau für $\alpha \in \{-1\} \cup \mathbb{R}_0^+$ Lipschitz-stetig.

(b) (i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} (1+\tan(x))^{\frac{2}{x}} &\overset{\text{Definition}}{=} \lim_{x\to 0} \left[\exp\left(\frac{2\cdot\log(1+\tan(x))}{x}\right)\right] \\ &\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \exp\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log(1+\tan(x))}{x}\right]\right) \end{aligned}$$

Sowie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\log(1+\tan(x))}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+\tan^2(x)}{1+\tan(x)}}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2(x)}{1+\tan(x)} = 1$$

Insgesamt folgt damit:

$$\lim_{x\to 0} (1+\tan(x))^{\frac{2}{x}} = e^2$$

(ii) Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\log(\cosh(2x))}^{\to 0}}{\underbrace{\log(\cosh(3x))}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)}}{\underbrace{3\frac{\sinh(3x)}{\cosh(3x)}}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(2x)}{\sinh(3x)} \cdot \underbrace{\frac{\cosh(3x)}{\cosh(2x)}}_{\to 1}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sinh(2x)}^{\to 0}}{\underbrace{\sinh(3x)}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{2\cosh(2x)}{3\underbrace{\cosh(3x)}_{\neq 0}} = \frac{4}{9}$$

Aufgabe 4:

(a) (i) Es gilt:

$$\int_1^2 \frac{\log(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^2 \underbrace{\log(t)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} \left[\log(t)\cdot\frac{-1}{t}\right]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{-1}{t}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\log(2)}{2} + \int_1^2 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\log(2)}{2} + \left[\frac{-1}{t}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{1-\log(2)}{2}$$

(ii) Es gilt:

$$\int te^{-t^2}\sin\left(e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t \underset{\mathrm{d}s=-2te^{-t^2}\mathrm{d}t}{\overset{s=e^{-t^2}}{=}} \int \frac{-te^{-t^2}}{2te^{-t^2}}\sin(s)\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int \sin(s)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\cos(s) = \frac{1}{2}\cos\left(e^{-t^2}\right)$$

Die obere Integrationsgrenze war ein Druckfehler! Wegen $2 < \pi$, ist $0 < \frac{2}{\pi} < 1$ und deshalb $\log\left(\frac{2}{\pi}\right) < 0$. Folglich ist

$$\sqrt{\log\left(\frac{2}{\pi}\right)} = \mathrm{i}\sqrt{\left|\log\left(\frac{2}{\pi}\right)\right|} = \mathrm{i}\sqrt{\log\left(\frac{\pi}{2}\right)} \in \mathbb{C}.$$

Formales Einsetzen der Integrationsgrenzen in die Stammfunktion (bzw. das Auffassen des Integrals als ein komplexes Wegintegral) liefert:

$$\int_0^{\sqrt{\log\left(\frac{2}{\pi}\right)}} te^{-t^2}\sin\left(e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\cos\left(e^{-t^2}\right)\right]_0^{\sqrt{\log\left(\frac{2}{\pi}\right)}} = -\frac{\cos(1)}{2}$$

(iii) Es gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{2t}}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} \left[\frac{1}{2}e^{2t}\sin(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}e^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{2t}}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2t}\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{e^{\pi}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t$ liefert („Phönix aus der Asche"):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{4}{5}\left(\frac{e^\pi}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1+2e^\pi}{5}$$

(b) (i) Für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left|\frac{e^t}{1+e^{2t}}\right| = \frac{e^t}{1+e^{2t}} \leq \frac{e^t}{e^{2t}} = e^{-t}$$

Ferner ist:

$$\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} -\left[e^{-t}\right]_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty} 1-e^{-b} = 1 < \infty$$

Nach dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale, ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{e^t}{1+e^{2t}}\mathrm{d}t$ konvergent.

(ii) Für alle $t \in [1,\infty)$ gilt $1+\frac{1}{2}\sin^{2014}(t) \geq \frac{1}{2}$ und folglich:

$$\frac{1+\frac{1}{2}\sin^{2014}(t)}{t} \geq \frac{1}{2t} > 0$$

Ferner ist:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\log(t)\right]_{t=1}^{t=b} = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\log(b) = \infty$$

Nach dem Minoratenkriterium für uneigentliche Integrale, ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1+\frac{1}{2}\sin^{2014}(t)}{t}\mathrm{d}t$ divergent.