Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
04.03.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}\right).$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 3^n}.$$

Aufgabe 2 (3+3+4=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto x + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$ nur in 0 eine Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Sie können dabei **a)** voraussetzen.

c) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie f'.

Aufgabe 3 ((2+3)+(2+3)=10 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (\tan(x))^n,$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, in denen die Folge $(f_n(x))$ konvergiert. Geben Sie die punktweise Grenzfunktion f an.

(ii) Untersuchen Sie die Folge (f_n) auf gleichmäßige Konvergenz in den Intervallen $[0, \frac{1}{2}]$ und $[0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y'(x) = 3x^2(1+y^2), \quad y(0) = 0.$

(ii) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \mathrm{e}^{3x}, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 11.$

Aufgabe 4 (2+3+5=10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

auf Konvergenz und geben Sie, falls möglich, seinen Wert an.
Hinweis: Substituieren Sie den Wurzelausdruck.

c) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$.

(ii) Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{Kern} A$ und geben Sie eine Basis davon an.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Freitag, den **10.04.2015**, unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **15.04.2015**, von **16 bis 18 Uhr** im Hörsaal am Fasanengarten (Geb. 50.35) statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **20.04.2015** bis **24.04.2015** statt.