Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
04.03.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}\right).$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 3^n}.$$

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen die Aussage per Induktion.
Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1.$$

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (**Induktionsvoraussetzung (IV)**). Dann gilt ($n \to n+1$)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)\cdot(n+1)! \overset{(IV)}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)!$$
$$= (n+1)! \cdot (1 + (n+1)) - 1 = (n+2)! - 1 = ((n+1)+1)! - 1.$$

Also gilt die Behauptung auch für $n+1$. Das Prinzip der vollständigen Induktion liefert uns, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Alternativ lässt sich die Summe in der Aufgabe auch umschreiben über

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1)\cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)! = (n+1)! - 1.$$

b) Wir beobachten, dass

$$\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1} = \frac{(n^2-1)(n^2+1)-(n^3+1)(n+3)}{(n+3)(n^2+1)} = \frac{n^4-1-(n^4+3n^3+n+3)}{n^3+3n^2+n+3}$$
$$= -\frac{3n^3+n+4}{n^3+3n^2+n+3} = -\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} -3,$$

womit der Grenzwert existiert und durch -3 gegeben ist.

c) Setzen wir $y = x^2$, so hat die Potenzreihe die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2 3^n}$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist gegeben durch

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2 3^n}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3\sqrt[n]{n^2}}} = 3.$$

Somit konvergiert die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 für $|y| < 3$ und divergiert für $|y| > 3$. Setzen wir $y = x^2$ ein, so ergibt sich für die Ausgangspotenzreihe Konvergenz für $|x| < \sqrt{3}$ und Divergenz für $|x| > \sqrt{3}$. Für $x = \pm\sqrt{3}$ hat die Reihe die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und konvergiert nach Vorlesung. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also genau dann, wenn $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Aufgabe 2 (3+3+4=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto x + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$ nur in 0 eine Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Sie können dabei **a)** voraussetzen.

c) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie f'.

Lösungsvorschlag

a) Die gegebene Funktion hat wegen $\log(1) = 0$ offensichtlich eine Nullstelle in 0. Bezeichnen wir die Funktion mit g, so ist diese unendlich oft stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = 1 + \frac{x}{1+x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Hätte g eine zweite Nullstelle, so würde aus dem Satz von Rolle (eine Folgerung aus dem Mittelwertsatz) folgen, dass g' eine Nullstelle besitzt. Es gilt

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

und letztere Gleichung besitzt keine reelle Nullstelle. Somit kann g keine zweite Nullstelle besitzen. Alternativ zeigt man, dass g streng monoton wachsend ist. Es gilt

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 > x.$$

Die letzte Aussage ist für alle $x \in \mathbb{R}$ korrekt: Für $x \leqslant 0$ ist die linke Seite positiv und die rechte Seite nicht positiv. Für $x \in (0,1]$ ist $(x+1)^2 > 1^2 = 1 \geqslant x$ und für $x > 1$ ist $(x+1)^2 > x^2 > x$. Somit gilt $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit g streng monoton wachsend ist und nur eine Nullstelle haben kann.
Alternativ betrachten wir

$$g''(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Wegen $g'(-1) = \frac{1}{2}$, $g'(1) = \frac{3}{2}$ und der Tatsache, dass

$$g'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} \xrightarrow{x \to \pm\infty} 1$$

ist $\frac{1}{2}$ das globale Minimum von g', weshalb $g' > 0$ und 0 die einzige Nullstelle von g ist.

b) Nach **a)** ist 0 die einzige Nullstelle des Nenners von f im Definitionsbereich $x \neq 0$. Deshalb ist f in $x \neq 0$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Außerdem gilt $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} x + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) = 0$ (und der Nenner hat außer in 0 keine Nullstelle), womit wegen der Regel von de l'Hospital folgt, dass

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)} \overset{l'H}{=} \frac{2x}{1 + \frac{x}{1+x^2}} = \frac{2 \cdot 0}{1 + \frac{0}{1+0^2}} = 0 = f(0),$$

da der rechte Grenzwert existiert. Wegen $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ist f auch stetig in 0 und somit auf ganz $\mathbb{R}$.

c) Für $x \neq 0$ ist f differenzierbar und es gilt mit den üblichen Rechenregeln, dass

$$f'(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right) \cdot 2x - x^2\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)^2} = \frac{x^2 + x\log(1+x^2) - \frac{x^3}{1+x^2}}{\left(x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)^2}$$

Damit f auch differenzierbar in 0 ist, muss der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

existieren. Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)}.$$

Es ist wieder $\lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} x + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) = 0$ (und der Nenner hat außer in 0 keine Nullstelle), womit wegen der Regel von de l'Hospital folgt, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)} \overset{l'H}{=} \frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}} = \frac{1}{1+\frac{0}{1+0^2}} = 1,$$

da der rechte Grenzwert existiert. Somit ist f auch in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 1$, die Ableitung f' ist also gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x\log(1+x^2)-\frac{x^3}{1+x^2}}{\left(x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)^2} & ,x\neq 0,\\ 1 & ,x=0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 ((2+3)+(2+3)=10 Punkte)

a) Für $n\in\mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (\tan(x))^n,$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie alle $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, in denen die Folge $(f_n(x))$ konvergiert. Geben Sie die punktweise Grenzfunktion f an.

(ii) Untersuchen Sie die Folge (f_n) auf gleichmäßige Konvergenz in den Intervallen $[0,\frac{1}{2}]$ und $[0,\frac{\pi}{4}]$.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y'(x) = 3x^2(1+y^2), \quad y(0) = 0.$

(ii) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{3x}, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 11.$

Lösungsvorschlag

a) (i) Wegen $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ ist der Tangens streng monoton wachsend auf $(-\pi/2,\pi/2)$. Aus $\tan(-\pi/4) = -1$, $\tan(\pi/4) = 1$ folgt also, dass $|\tan(x)| < 1$ für $|x| < \pi/4$ und $|\tan(x)| > 1$ für $|x| > \pi/4$. Demnach gilt die folgende Fallunterscheidung.

1. Fall: $|x| < \pi/4$. Wegen $|\tan(x)| < 1$ gilt $f_n(x)\to 0$ für $n\to\infty$.
2. Fall: $x = -\pi/4$. Wegen $\tan(-\pi/4) = -1$ gilt $f_n(x) = (-1)^n$, was keine konvergente Folge ist.
3. Fall: $x = \pi/4$. Wegen $\tan(\pi/4) = 1$ gilt $f_n(x) = 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
4. Fall: $\pi/2 > |x| > \pi/4$. Wegen $|\tan(x)| < 1$ gilt $|f_n(x)|\to\infty$ für $n\to\infty$, die Folge $(f_n(x))$ divergiert also.

Insgesamt konvergiert $(f_n(x))$ genau dann, wenn $x\in(-\pi/4,\pi/4]$ und die punktweise Grenzfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x\in(-\pi/4,\pi/4),\\ 1 & ,x=\pi/4. \end{cases}$$

(ii) Als Grenzfunktion für die gleichmäßige Konvergenz kommt nur die punktweise Grenzfunktion aus (i) in Frage. Für $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |\tan(x)|^n \leqslant (\tan(1/2))^n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

wegen der Monotonie des Tangens und $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$. Nach einer Aussage der Vorlesung beweist diese von x unabhängige Abschätzung gegen eine Nullfolge die gleichmäßige Konvergenz. Auf $[0, \pi/4]$ kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein, da die Funktionen f_n auf diesem Intervall stetig sind, die Grenzfunktion f jedoch nicht.

b) (i) Wir benutzen das Verfahren zur Trennung der Veränderlichen, um die Differenzialgleichung zu lösen. Die Differenzialgleichung hat die Form

$$y' = f(x)g(y), y(0) = 0,$$

mit $f(x) = 3x^2$ und $g(y) = 1 + y^2$. Beide Funktionen sind jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und g ist dort auch Nullstellenfrei. Die Lösung findet sich nun durch Auflösen der Gleichung

$$\int_0^y \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

nach y. Es gilt

$$\int_0^y \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^y \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = [\arctan(s)]_{s=0}^{y} = \arctan(y)$$

und

$$\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x 3s^2\,\mathrm{d}s = \left[s^3\right]_{s=0}^{x} = x^3.$$

Gleichsetzen und Auflösen liefert nun

$$y(x) = \tan\left(x^3\right).$$

Das maximale Existenzintervall muss nun die 0 beinhalten und die gefundene Funktion muss auf dem Intervall definiert und differenzierbar sein. Dies ist für den Tangens auf $(-\pi/2, \pi/2)$ der Fall. Es gilt

$$x^3 \in (-\pi/2, \pi/2) \Leftrightarrow x \in (-\sqrt[3]{\pi/2}, \sqrt[3]{\pi/2}),$$

womit das maximale Existenzintervall durch $(-\sqrt[3]{\pi/2}, \sqrt[3]{\pi/2})$ gegeben ist.

(ii) Es handelt sich um eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom P der Gleichung ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2,$$

womit eine zweifache Nullstelle in 2 vorliegt. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist demnach

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 x \mathrm{e}^{2x}.$$

Für die spezielle Lösung wählen wir den Ansatz $y_p(x) = Ae^{3x}$, da 3 keine Nullstelle von P ist. Es folgt

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x}, \qquad y_p''(x) = 9Ae^{3x},$$

und somit gilt, wenn wir dies in die Ausgangsgleichung einsetzen, dass

$$y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) = Ae^{3x} \stackrel{!}{=} e^{3x},$$

womit $A = 1$ folgt. Für die allgemeine Lösung gilt nun

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^{3x}.$$

Nun bestimmen wir noch c_1 und c_2 über die Anfangswerte. Es gilt

$$4 \stackrel{!}{=} y(0) = c_1 + 1 \Leftrightarrow c_1 = 3.$$

Außerdem gilt

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + 3e^{3x},$$

also

$$11 \stackrel{!}{=} y'(0) = 2c_1 + c_2 + 3 \Leftrightarrow c_2 = 8 - 2c_1 = 8 - 6 = 2.$$

Somit lautet die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = 3e^{2x} + 2xe^{2x} + e^{3x}.$$

Aufgabe 4 (2+3+5=10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

auf Konvergenz und geben Sie, falls möglich, seinen Wert an.
Hinweis: Substituieren Sie den Wurzelausdruck.

c) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$.

(ii) Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{Kern} A$ und geben Sie eine Basis davon an.

Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen zwei Mal partielle Integration, um das Integral zu berechnen. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{\cos(x)}_{v'}\, \mathrm{d}x &\overset{P.I.}{=} [x^2 \sin(x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{P.I.}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2[x(-\cos(x))]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2[\sin(x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2.
\end{aligned}$$

b) Sei $b > \sqrt{2}$. Es gilt, mit der Substitution $y = \sqrt{x^2-1}$ (also $\frac{dy}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ sowie $x = \sqrt{y^2+1}$ (wegen des positiven Vorzeichens von x)), dass

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{b} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}}^{\sqrt{b^2-1}} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}\,y} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{b^2-1}} \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\
&= [\arctan(y)]_{y=1}^{\sqrt{b^2-1}} = \arctan(\sqrt{b^2-1}) - \arctan(1) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

wegen $\lim_{b\to\infty}\sqrt{b^2-1} = \infty$, $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

c) (i) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b|c)$ auf Zeilennormalform um, damit wir die Lösungen ablesen können.

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & \frac{11}{3} & 1 \end{array}\right) \mid \cdot 3$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 11 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & 0 & 9 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \mid \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Dies bedeutet, dass die Gleichung $Ax = b$ nicht lösbar ist, da $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|b)$. Die Gleichung $Ax = c$ ist lösbar, die verbliebenen Gleichungen sind

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

und somit

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3 - 4x_3 - 3x_4 \\ x_3 = \qquad x_3 \\ x_4 = \qquad\qquad x_4. \end{cases}$$

Durch die Wahl von freien Paramtern für x_3 und x_4 ergibt sich als Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii) Kern A ist die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$. In (i) haben wir bereits die Zeilennormalform von A gesehen, anhand derer wir analog die Lösung ablesen (ersetze den umgeformten Vektor c durch den Nullvektor). Der Kern ist somit gegeben durch

$$\operatorname{Kern} A = \left\{ s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da die beiden Vektoren, die den Kern aufspannen, offensichtlich linear unabhängig sind (es befinden sich Einsen an Stellen, an denen der jeweils andere Vektor eine Null besitzt), bilden diese eine Basis von Kern A, welcher deshalb die Dimension 2 hat.