Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
07.03.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$

$$\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

gilt.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$$

konvergiert.

c) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \sin\left(n + \frac{1}{n}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungswert besitzt. Gilt $a_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$?
Hinweis: Es gilt $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 2 (3+2+5=10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{x+\frac{1}{2}\sin(x)}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(x)$ nur in 0 eine Nullstelle hat.

b) Zeigen Sie, dass f stetig ist. Dabei dürfen Sie **a)**, jedoch nicht **c)** verwenden.

c) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie f'.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 ((2+3)+(2+3)=10 Punkte)

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := x + \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und $g_n := f_n^2$.

(i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(ii) Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\cos(2x)$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von g.

(ii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(g,0)$ ersten Grades von g um 0. Zeigen Sie, dass für alle $x \geqslant 0$

$$|T_1(g,0)(x) - g(x)| \leqslant \frac{23}{8}x^2$$

gilt.

Aufgabe 4 (4+2+4=10 Punkte)

a) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Riemannintegral auf Konvergenz:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $x \geqslant 0$

$$\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x} \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$$

gilt.

b) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie s und t so, dass $\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Falle eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) = 2xy(x)^2 + 2x \qquad y(0) = 0.$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Donnerstag, den **21.04.2016**, unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **28.04.2016**, von **16 bis 18 Uhr** im Hörsaal am Fasanengarten (Geb. 50.35) statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **02.05.2016** bis **06.05.2016** statt.