Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
07.03.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$

$$\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

gilt.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$$

konvergiert.

c) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \sin\left(n + \frac{1}{n}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungswert besitzt. Gilt $a_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$?
Hinweis: Es gilt $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 3$ gilt

$$\sum_{k=3}^{3} k(k-1)(k-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Induktionsschluss: Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$ wahr **(Induktionsvoraussetzung)**. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n+1} k(k-1)(k-2) &= \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) + (n+1)n(n-1) \\
&\overset{\textbf{(IV)}}{=} \frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1) + (n+1)n(n-1) \\
&= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)[(n-2)+4] = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

b) Sei $x \in \mathbb{R}$ zunächst beliebig und definiere $a_n := (1-\frac{x}{2n})^{n^2}(1+\frac{x}{n})^{n^2}$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(1-\frac{x}{2n}\right)^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Dabei fallen die Betragsstriche nach dem ersten Gleichheitszeichen weg, da für $n > |x|$ die Terme innerhalb der Klammern positiv werden und endlich viele Terme zur Bestimmung des Limes (Superior) keine Rolle spielen. Nach dem **Wurzelkriterium** konvergiert dann $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut, wenn $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} < 1$, und divergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$, wenn $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 1$. Das ist genau dann der Fall, wenn $x < 0$ (für die Konvergenz) bzw. $x > 0$ (für die Divergenz) gilt. Bei $x = 0$ ist offensichtlich

$$\sum_{n=1}^\infty \left(1-\frac{0}{2n}\right)^{n^2}\left(1+\frac{0}{n}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^\infty 1$$

divergent. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^\infty (1-\frac{x}{2n})^{n^2}(1+\frac{x}{n})^{n^2}$ genau dann, wenn $x \in (-\infty, 0)$.

c) Es ist

$$|a_n| = \left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt insbesondere, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Daraus folgt mit dem **Satz von Bolzano-Weierstrass**, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (min.) einen Häufungswert besitzt.
Zum zweiten Teil: Angenommen, es gälte $a_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.,

$$\sin\left(n+\frac{1}{n}\right) = 0$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Hinweis (siehe auch **Aufgabe 43b)**) gäbe es dann ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$n+\frac{1}{n} = k\pi.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wäre strikt positiv, weswegen $k \in \mathbb{N}$ gelten müsste. Insbesondere gälte dann

$$\frac{n^2+1}{nk} = \pi.$$

Dies wäre ein Widerspruch dazu, dass die linke Seite der Gleichung eine rationale und die rechte Seite eine irrationale Zahl wäre.

Aufgabe 2 (3+2+5=10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{x+\frac{1}{2}\sin(x)}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(x)$ nur in 0 eine Nullstelle hat.

b) Zeigen Sie, dass f stetig ist. Dabei dürfen Sie **a)**, jedoch nicht **c)** verwenden.

c) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie f'.

Lösungsvorschlag

a) Definiere $g(x) := x + \frac{1}{2}\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $g(0) = 0$ und

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x) \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da g als streng wachsende Funktion insbesondere injektiv ist, hat g keine weiteren Nullstellen.

b) Nach **a)** ist f außerhalb von 0 als Komposition stetiger Funktionen stetig. Außerdem gilt

$$\frac{x + \frac{1}{2}\sin(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{x} \to 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

wenn $x \to 0$, wobei wir den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ verwendet haben. Damit gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \frac{1}{2}\sin(x)} = \frac{2}{3},$$

wodurch wir einsehen, dass f auch in 0 stetig ist.

c) Nach **a)** ist f außerhalb von 0 als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Dort gilt

$$f'(x) = \frac{x + \frac{1}{2}\sin(x) - x(1 + \frac{1}{2}\cos(x))}{(x + \frac{1}{2}\sin(x))^2} = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{2(x + \frac{1}{2}\sin(x))^2} \quad \forall x \neq 0.$$

Außerdem erhalten wir für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{3x - 2x - \sin(x)}{3(x + \frac{1}{2}\sin(x))x} = \frac{x}{x + \frac{1}{2}\sin(x)} \frac{x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{3x^2} \\ &= f(x) \underbrace{\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n-1}}_{=:h(x)}.\end{aligned}$$

Als Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ (!) ist h in 0 stetig mit $h(0) = 0$. Da auch f in 0 stetig ist, ist f auch in 0 differenzierbar und es gilt (mithilfe der Grenzwertsätze für Funktionen)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f(0)h(0) = 0.$$

Aufgabe 3 ((2+3)+(2+3)=10 Punkte)

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := x + \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und $g_n := f_n^2$.

(i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(ii) Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\cos(2x)$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von g.

(ii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(g,0)$ ersten Grades von g um 0. Zeigen Sie, dass für alle $x \geqslant 0$

$$|T_1(g,0)(x) - g(x)| \leqslant \frac{23}{8}x^2$$

gilt.

Lösungsvorschlag

a) (i) Offensichtlich konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f, wobei $f(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$, die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}$ sei. Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{wenn } n \to \infty.$$

Damit konvergiert $|f_n(x) - f(x)|$ unabhängig von x gegen 0. Insbesondere konvergiert dann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f.

(ii) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$g_n(x) = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Dann konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ offensichtlich punktweise gegen g. Wählt man nun $x_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir

$$|g_n(x_n) - g(x_n)| = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Das heißt, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig gegen g konvergiert.

b) (i) Durch leichtes Nachrechnen ergibt sich

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}(\cos(2x) + 4\sin(2x)),$$
$$g''(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/2}(-15\cos(2x) + 8\sin(2x)).$$

(ii) Das Taylorpolynom ersten Grades von g um 0 ist gegeben durch

$$T_1(g,0)(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x = 1 - \frac{x}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem **Satz von Taylor** gilt für $x \geqslant 0$

$$|T_1(g,0)(x) - g(x)| = \left|\frac{g''(\xi)}{2!}x^2\right|$$

für eine Zwischenstelle $\xi \in (0,x)$. Außerdem gilt

$$|g''(\xi)| = \left|\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\xi/2}(-15\cos(2\xi) + 8\sin(2\xi))\right| \leqslant \frac{23}{4}$$

unabhängig von ξ. Damit gilt für alle $x \geqslant 0$

$$|T_1(g,0)(x) - g(x)| \leqslant \frac{23}{8}x^2.$$

Aufgabe 4 (4+2+4=10 Punkte)

a) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Riemannintegral auf Konvergenz:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $x \geqslant 0$

$$\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x} \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$$

gilt.

b) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie s und t so, dass $\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Falle eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) = 2xy(x)^2 + 2x \qquad y(0) = 0.$$

Lösungsvorschlag

a) Zunächst zeigen wir den Hinweis. Dazu formen wir die zu zeigende Ungleichung gemäß

$$\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x/2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \leqslant \mathrm{e}^{x/2} \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \mathrm{e}^x$$

für alle $x \geqslant 0$ um. Letzte Ungleichung ist erfüllt, wie man z.B. durch die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion einsieht. Zunächst einmal gilt

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/2}\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-x/2}\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} 2\left(1 - \mathrm{e}^{-b/2}\right) = 2.$$

Nach dem Hinweis gilt

$$|\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}| = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$$

für alle $x \geqslant 0$. Dann konvergiert nach dem **Majorantenkriterium für Integrale** auch $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$ (absolut).

b) Wir bestimmen zunächst die Zeilenstufenform von A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-s) \\ \\ + \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \\ 0 & 1-2s \end{pmatrix}.$$

Damit hat A genau dann einen nicht-trivialen Kern, wenn $t = 0$ und $s = \frac{1}{2}$. In diesem Fall ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des Kerns.

c) Zunächst formen wir die Differentialgleichung äquivalent um:

$$y'(x) \;=\; 2xy(x)^2 + 2x = 2x(y(x)^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)^2 + 1} \;=\; 2x.$$

Mithilfe von *Trennung der Variablen* erhalten wir dann

$$\int_{y(x_0)}^{y} \frac{\mathrm{d}s}{s^2 + 1} \;=\; \int_{x_0}^{x} 2t \;\mathrm{d}t$$

mit $x_0 := 0$ und $y(x_0) = 0$ nach Voraussetzung. Ausrechnen der Integrale liefert

$$\arctan(y) \;=\; x^2.$$

Da der Wertebereich von arctan $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist, ist diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, für welche $x^2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt. Daher ist die Gleichung maximal für $x \in I := (-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ erfüllbar. Wir merken an, dass der Anfangswert 0 in I liegt. Die maximale Lösung des gegebenen Anfangsproblems lautet dann

$$\Phi : I \to \mathbb{R},\; x \mapsto \tan(x^2).$$