Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

WS2016/17
07.03.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ die Ungleichung

$$2^n > n^2$$

erfüllen.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (9 + (-1)^n)^n \, x^n$$

konvergiert.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2: (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)

(a) Der Kotangens $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Zeigen Sie, dass $\cot(x)$ invertierbar ist und dass die Umkehrfunktion $\cot^{-1}(x) =: \operatorname{arccot}(x)$ die Ableitung

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

besitzt.

(b) Zeigen Sie für $x \in (-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ die Darstellung

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}\right) = x + \frac{3}{4}\pi.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung der linken Seite.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x(y-1) \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: (4 + 4 + 2 = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x$ und

(ii) $\int_1^e x^3 \ln(x^2)\,\mathrm{d}x$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz

(i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ und

(ii) $\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)^\gamma}\,\mathrm{d}x$ wobei $\gamma > 0$.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{c}\right)^{\frac{2017}{2}}$$

mindestens eine reelle Nullstelle $x_0 \in (0,1)$ besitzt.

Aufgabe 4: (5 + 5 = 10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) &= 6e^{-x}, \\ y(0) = y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie für die folgende Matrix A den Rang(A), sowie je eine Basis von Bild(A) und Kern(A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **27.04.2017** im Intranet, sowie durch Aushang am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 des Gebäudes 20.30 bekannt gegeben.
- Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **04.05.2017**, zwischen **16:00** und **18:00** im Hörsaal Neue Chemie statt.
- Mündliche Nachprüfungen finden in der Woche vom **08.05.** bis **12.05.2017** im Gebäude 20.30 statt.