Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS2017
19.09.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1:

(a) (i) Kurze Rechnung liefert

$$z_2 = -\mathrm{i}, \qquad z_3 = -1, \qquad z_4 = \mathrm{i}, \qquad = 1, \qquad z_5 = -\mathrm{i}.$$

Folglich gilt

$$z = (z_2 + z_3)^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{i}+1} = -\frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{i}-1}{2}$$

und somit $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}$ und $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) Die Rechnung im letzten Aufgabenteil lässt die Vermutung

$$z_n = (-\mathrm{i})^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

zu. Diese wird durch vollständige Induktion wie folgt bewiesen.

- *IA* ($n = 0$ und $n = 1$): Es gilt $z_0 = \mathrm{i} = \frac{1}{(-\mathrm{i})}$, sowie $z_1 = 1 = (-\mathrm{i})^0$.

- *IS* ($0, \dots, n+1 \rightsquigarrow n+2$): Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für alle $k \in \{0, \dots, n+1\}$ gelte die *IV* $z_k = (-\mathrm{i})^{k-1}$. Dann gilt für $n+2$

$$z_{n+2} = -\frac{z_n + \mathrm{i} z_{n+1}}{2} \overset{\text{(IV)}}{=} -\frac{(-\mathrm{i})^{n-1} + \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i})^n}{2} = -(-\mathrm{i})^{n-1} = (-\mathrm{i})^{n+1}.$$

□

(b) Setzte $y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n}(x-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n.$$

Die Formel von Cauchy-Hadamard liefert

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

für den Konvergenzradius R der Potenzreihe in y. Folglich ist die Potenzreihe (absolut) konvergent für alle $y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \in (-1, 1)$ und divergent für alle $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Im rechten Randpunkt $y = 1$ ist die Potenzreihe als harmonische Reihe divergent.

Wegen $y \geq 0$ ist die Potenzreihe also genau für

$$y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \in [0, 1) \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

konvergent.

Aufgabe 2:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist wegen der Stetigkeit des Cosinuses

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(x + \frac{1}{n}\right) = \cos\left(x + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \cos(x) =: f(x).$$

Also gilt $f_n \to f$ punktweise auf $\mathbb{R}$. Ferner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\cos\left(x + \frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right| = \left|\cos(x)\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos(x)\right| \\ &\leq |\cos(x)| \cdot \left|\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| + |\sin(x)| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\ &\leq \left|\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| + \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| =: \alpha_n. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit des Cosinuses und des Sinuses gilt $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Folglich konvergiert (f_n) sogar gleichmäßig gegen f.

(b) Setzte vorbereitend $h(x) = \sin(x) - x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Gesucht ist offenbar die Nullstellenmenge $\mathcal{N}$ von h. Da

$$\sin(x) = x \Rightarrow |x| = |\sin(x)| \leq 1$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$, gilt $\mathcal{N} \subseteq [-1, 1]$.

Offensichtlich ist $0 \in \mathcal{N}$. Angenommen, es gäbe ein weiteres $x_1 \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Nach dem Mittelwertsatz existierte dann ein ξ *echt* zwischen 0 und x_1 (insbesondere $0 < |\xi| < 1$) mit

$$0 = h(x_1) - h(0) = h'(\xi)(x_1 - 0) = (\cos(\xi) - 1)x_1.$$

Da $x_1 \neq 0$, müsste $\cos(\xi) = 1$ bzw. $\xi \in 2\pi\mathbb{Z}$ gelten. Dies ist ein Widerspruch, da

$$2\pi\mathbb{Z} \cap (-1, 1) = \{0\}$$

und $\xi \neq 0$. Also ist tatsächlich $\mathcal{N} = \{0\}$.

(c) Nach der letzten Teilaufgabe ist 0 die einzige Nullstelle von $\sin(x) - x$. Folglich ist g_a für jedes $a \in \mathbb{R}$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

In 0 gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g_a(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin(x) - x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{\cos(x) - 1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{12x^2}{\sin(x)} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{24x}{\cos(x)} = 0. \end{aligned}$$

Also ist g_a genau für $a = 0$ stetig (in 0).

Nach der Quotientenregel ist g_a auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, da dort $\sin(x) - x \neq 0$. In 0 gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g_0(h) - g_0(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{\sin(h) - h} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h^2}{\cos(h) - 1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} -\lim_{h\to 0} \frac{6h}{\sin(h)} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} -\lim_{h\to 0} \frac{6}{\cos(h)} = -6. \end{aligned}$$

Also ist g_0 (in 0) sogar differenzierbar.

Aufgabe 3:

(a) (i) Substitution $s = \sqrt{t}$, $\mathrm{d}s = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ liefert

$$\int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^4 \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s = -2\left[\ln(s-1)\right]_{s=2}^4 = -2\ln(3).$$

(ii) Es gilt (Phönix-aus-der-Asche-Trick™)

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{e^{-t}}_{f'}\underbrace{\cos(2t)}_{g}\,\mathrm{d}t &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -e^{-t}\cos(2t) - 2\int \underbrace{e^{-t}}_{f'}\underbrace{\sin(2t)}_{g}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} -e^{-t}\cos(2t) + 2e^{-t}\sin(2t) - 4\int e^{-t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t. \\
\Rightarrow \int e^{-t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{5}e^{-t}\left(2\sin(2t)-\cos(2t)\right).
\end{aligned}$$

und folglich

$$\int_0^{\pi} e^{-t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-\pi}}{5}.$$

(b) Sei $\alpha > 0$. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(t)}{t^{\alpha}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\alpha t^{(\alpha-1)}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\alpha t^{\alpha}} = 0.$$

Deshalb gibt es ein $C > 1$ derart, dass $\left|\frac{\ln(t)}{t^{\alpha}}\right| \leq 1$ für alle $t > C$ ausfällt. Da das Intervall $[1, C]$ kompakt ist, gibt es ein $\tilde{C} > 0$ derart, dass $\left|\frac{\ln(t)}{t^{\alpha}}\right| \leq \tilde{C}$ für alle $t \in [1, C]$ ausfällt. Damit folgt, dass

$$\left|\frac{\ln(t)}{t^{\alpha}}\right| \leq \tilde{C} + 1$$

für alle $t \in [1, \infty)$ gilt, also die Gültigkeit der Aussage im Hinweis.

Insbesondere ($\alpha = \frac{1}{2}$) existiert ein $C > 0$ so, dass für jedes $t \geq 1$

$$\left|\frac{\sin(t)\ln(t)}{t^2}\right| \leq \frac{\ln(t)}{t^2} \leq \frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \leq C\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

gilt. Ferner gilt

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = -2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right]_{t=1}^{b} = 2 < \infty.$$

Folglich konvergiert das uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium (absolut).

(c) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Folglich

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{-y(x)}\sin(x) \\
\rightsquigarrow e^{y}\,\mathrm{d}y &= \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_{y(0)}^{y(x)} e^{\xi}\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^x \sin(\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
\Rightarrow \left[e^{\xi}\right]_{\xi=y(0)}^{y(x)} &= -\left[\cos(\eta)\right]_{\eta=0}^{x} \\
\Rightarrow e^{y(x)} - 1 &= 1-\cos(x) \\
\Rightarrow y(x) &= \ln\left(2-\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -2$, $\lambda_2 = 1$. Damit hat die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung die Gestalt

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ freie Konstanten sind.

Da -1 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der Ansatz von der Form der rechten Seite für eine partikuläre Lösung y_{p} der inhomogenen Differentialgleichung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = Ce^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit der zu bestimmenden Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} Ce^{-x} - Ce^{-x} - 2Ce^{-x} &= e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow C &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + y_{\mathrm{h}}(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung mit der Ableitung

$$y'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingungen führt auf

$$y(0) = -\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 0,\; y'(0) = \frac{1}{2} - 2C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3},\; C_2 = \frac{1}{6}.$$

Also ist

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + y_{\mathrm{h}}(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

(b) Bringe zunächst die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha^2+1 & \alpha+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

- $|\alpha| \neq 1$: In diesem Fall ist die Zeilennormalform durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \;\Big|\, \frac{1}{\alpha^2-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 - \frac{2}{\alpha+1} \\ 0 & 1 & 0 & 11 + \frac{2}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Man liest ab, dass das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 - \frac{2}{\alpha+1} \\ 11 + \frac{2}{\alpha+1} \\ \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$$

- $\alpha = 1$: In diesem Fall ist die Zeilennormalform durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit dem (-1)-Ergänzungstrick liest man

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ab. Weiteres Ablesen liefert eine partikuläre Lösung

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Allgemeine Lösung lautet demnach

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit freiem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\alpha = -1$: In diesem Fall ist die Zeilennormalform durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man liest ab, dass das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ keine Lösungen hat.