Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

WS2016/17
07.03.2017

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1:

(a) Beweis durch vollständige Induktion über n.
Der Induktionsanfang ist in diesem Fall für $n = 5$

$$32 = 2^5 > 5^2 = 25. \tag{IA}$$

Wir formulieren somit die Induktionsvoraussetzung

$$\text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5 \text{ gelte die Ungleichung } 2^n > n^2. \tag{IV}$$

Im Induktionsschritt machen wir unter der Verwendung von (IV) und $n \geq 5$ folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{(IV)}}{>} 2 \cdot n^2 &= n^2 + n \cdot n \\ &\geq n^2 + 5n \\ &= n^2 + 2n + 3n \\ &> n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned} \tag{IS}$$

(b) Es ist

$$a_n = (9 + (-1)^n)^n = \begin{cases} 10^n, & n \text{ gerade} \\ 8^n, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Unter Verwendung des Wurzelkriteriums erhalten wir

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 10.$$

Damit ist die Potenzreihe konvergent für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{10}$ und divergent, falls $|x| > \frac{1}{10}$.
Die Randpunkte $x = \pm\frac{1}{10}$ müssen gesondert untersucht werden.
Für $x = \frac{1}{10}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (9 + (-1)^n)^n \frac{1}{10^n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(9 + (-1)^{2k}\right)^{2k} \frac{1}{10^{2k}} + \left(9 + (-1)^{2k-1}\right)^{2k-1} \frac{1}{10^{2k-1}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{4}{5}\right)^{2k-1} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Die analoge Rechnung für $x = -\frac{1}{10}$ ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (9 + (-1)^n)^n \frac{1}{(-10)^n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(9 + (-1)^{2k}\right)^{2k} \frac{1}{10^{2k}} - \left(9 + (-1)^{2k-1}\right)^{2k-1} \frac{1}{10^{2k-1}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{2k-1} \right] = \infty. \end{aligned}$$

(c) Für $x = 0$ gilt $0 = f_n(0) \to 0, n \to \infty$. Ist $x \neq 0$, so haben wir

$$f_n(x) = \frac{1}{x} n x^2 e^{-nx^2} \overset{\text{l'Hospital}}{\to} 0, \quad n \to \infty.$$

Somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise gegen die Nullfunktion $f(x) = 0$.
Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig. Um das zu sehen, betrachten wir die spezielle Folge $x_n = \frac{1}{n}$. Es gilt offenbar

$$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = e^{-\frac{1}{n}} \to 1 \neq 0.$$

□

Aufgabe 2:

(a) Da $\cos(x)$ und $\frac{1}{\sin(x)}$ auf $(0,1)$ stetig sind, ist es auch der Kotangens. Weiter ist $\cot(x)$ streng monoton fallend auf $(0,1)$, da

$$\cot'(x) = -1 - \cot(x)^2 < 0.$$

Mit Hilfe des Satzes zur Umkehrfunktion $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ berechnen wir die Ableitung

$$\begin{aligned}\operatorname{arccot}'(x) &= \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot}(x))} \\ &= \frac{1}{-1 - \cot(\operatorname{arccot}(x))^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen die Abeleitung von $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)$ mit Hilfe der Kettenregel

$$f'(x) = \operatorname{arccot}'\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)'. \tag{1}$$

Um die Ableitung vom Arkuskotangens ist aus Aufgabenteil (a) bekannt. Weiter ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)' &= \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)} - \frac{(\sin(x)+\cos(x))^2}{(\sin(x)-\cos(x))^2} \\ &= -1 - \left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)^2.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Ableitung von f

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)^2}\left(-1 - \left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)^2\right) = 1.$$

Also hat f die Form $f(x) = x + c$. Den Wert der Konstanten c bestimmen wir aus

$$c = f(0) = \operatorname{arccot}(-1)$$

und erhalten die Bedingung $\cot(c) = -1$, oder äquivalent dazu $\cos(c) = -\sin(c)$. Da $\operatorname{arccot}(x) \in (0,\pi)$ ist, muss $c = \frac{3}{4}\pi$ sein.

(c) Wir schreiben formal

$$\frac{dy}{dx} = x(y-1) \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{y-1}\,\mathrm{dy} = \int x\,\mathrm{dx}$$

und erhalten

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Auflösen nach $y(x)$ liefert

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1,$$

wobei $C = e^c$ ist. Den Wert der Konstanten C bestimmen wir aus dem Anfangswert

$$y(0) = C + 1 = \frac{1}{2}.$$

Damit ist $C = -\frac{1}{2}$ und die Lösung der DGL lautet

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x^2} + 1.$$

□

Aufgabe 3:

(a) (i) Wir substituieren $\sin(x) = t$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,\mathrm{dx} &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}\\ &= \arctan(1) - \arctan(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(ii) Wir integrieren partiell und erhalten

$$\begin{aligned}\int_1^e x^3\ln(x^2)\,\mathrm{dx} &= 2\int_1^e x^3\ln(x)\,\mathrm{dx}\\ &= 2\left(\left[\frac{1}{4}x^4\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}\,\mathrm{dx}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[x^4\ln(x) - \frac{1}{4}x^4\right]_1^e\\ &= \frac{3}{8}e^4 + \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(b) (i) Wir untersuchen den Grenzwert $\lim_{t\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{dx}$. Partielle Integration ergibt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{dx} = \frac{\sin(t)}{t} + \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{dx}.$$

Weiter ist wegen $\sin(x) \leq 1$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{dx} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{t}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{dx} \leq \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t} - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi}\right) < \infty.$$

(ii) Wir substituieren $\ln(x) = s$ und erhalten für $\gamma \neq 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_e^t \frac{1}{x\ln(x)^\gamma}\,\mathrm{dx} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{\ln(t)} \frac{1}{s^\gamma}\mathrm{ds} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{1-\gamma} s^{1-\gamma}\right]_1^{\ln(t)} \\
&= \frac{1}{\gamma-1} - \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)^{1-\gamma}}{\gamma-1}.
\end{aligned}$$

Im Falle $\gamma = 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_e^t \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{\ln(t)} \frac{1}{s}\mathrm{ds} \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln(\ln(t)).
\end{aligned}$$

Da $\ln(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, ist das gegebene Integral für $\gamma > 1$ konvergent und für $\gamma \leq 1$ divergent.

(c) Die gegebene Funktion f ist als Linearkombination stetiger Funktionen stetig. Weiter ist

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{und} \\
&\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c}\right)^{\frac{2017}{2}} < 0,
\end{aligned}$$

falls $c > 1$. Die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz.

□

Aufgabe 4:

(a) Wir suchen zunächst eine Lösung y_h der homogenen Gleichung. Das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$. Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}$$

mit reellen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Für die partikuläre Lösung y_p machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Axe^{-x},$$

wobei die Konsante $A \in \mathbb{R}$ im folgenden bestimmt wird. Es ist

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= Ae^{-x} - Axe^{-x} \\
y_p''(x) &= -2Ae^{-x} + Axe^{-x}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von y_p in die DGL ergibt

$$y_p''(x) - 4y_p'(x) - 5y_p(x) = -6Ae^{-x}.$$

Somit ist $A = -1$ und eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = -xe^{-x}.$$

Als allgemeine Lösung der DGL erhalten wir nun

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} - xe^{-x}.$$

Den Wert der Konstanten c_1 und c_2 bestimmen wir mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) &= -c_1 + 5c_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten $c_1 = -\frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{6}$ und

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{5x} - xe^{-x}.$$

(b) Wir bringen die Matrix A auf Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -12 \\ 0 & -6 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & -8 & -24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus können wir direkt $\text{Rang}(A) = 2$ und

$$\text{Bild}(A) = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ablesen. Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks, erhalten wir

$$\text{Kern}(A) = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\square$