Institut für Analysis
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

WS2017/18
05.03.2018

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Klausur

Aufgabe 1: ((2 + 3) + 5 = 10 Punkte)

(a) Die Gamma Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \,.$$

Zeigen Sie:

(i) Das Integral in der Definition von $\Gamma(x)$ ist konvergent für alle $x > 0$.

(ii) Es gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$. (*Induktion*)

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-m}) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ ist f eine stetig differenzierbare Funktion?

Aufgabe 2: ((1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) + 2 + 2 = 10 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge.

(i) Was bedeutet es, dass $(a_n)_n$ gegen L konvergiert?

(ii) Wie ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ definiert?

(b) Finden Sie:

(i) Eine Folge mit unendlich vielen Häufungspunkten.

(ii) Eine Folge ohne Häufungspunkte.

(c) (i) Konstruieren Sie eine positive Nullfolge, so dass $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ divergiert.

(ii) Warum ist Ihr Beispiel nicht im Konflikt mit dem Leibniz-Kriterium?

(d) Sei $s(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Zeigen Sie, dass

$$s(x) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \ x \in (-1, 1] \,.$$

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist. Nimmt f sein Minimum an?

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: ((2 + 3) + (3 + 2) = 10 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} | \, |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}|\}$,

(ii) $C = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - \mathrm{i}| \geq 1 \wedge |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\}$.

(b) Begründen Sie, warum die folgenden Funktionen f ihr Maximum und Minimum annehmen und berechnen Sie diese:

(i) $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -6x + (|x - 3| + 2)^2$,

(ii) $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 - x + e^{-1})$.

Aufgabe 4: (4 + (3 + 3) = 10 Punkte)

(a) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos(x))$. Finden Sie die ersten Terme der Taylorreihe von f bis zur Ordnung x^8 um $x_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte:

(i) $\lim_{x\to\infty} \left(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right)$,

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:
Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **17.04.2018**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **19.04.2018**, von **16 bis 18 Uhr** im **Fasanengarten-Hörsaal (Geb. 50.35)** statt.