Modulprüfung
Höhere Mathematik 1 für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ($6 + (4 + 3) + 7 = 20$ Punkte)

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv durch $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ definiert. Zeigen Sie, dass
$$a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$
für alle $n \geq 1$ gilt.

b) (i) Geben Sie eine Funktion $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ an, die surjektiv und stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ gibt, die bijektiv und stetig ist.

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - n} x^n$ konvergiert.

Aufgabe 2 ($(2 + 2 + 4) + (3 + 3) + (3 + 3) = 20$ Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$ und $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig konvergiert.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (g_n) gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\sin(2x)}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin(x) - x}$.

c) Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen.

(i) $\displaystyle\int 2x \sin(x^2)\, \mathrm{d}x$.

(ii) $\displaystyle\int x^2 \sin(2x)\, \mathrm{d}x$.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 ($4+8+8=20$ Punkte)

a) Zeigen Sie
$$\frac{1}{x+1} \le \log(x+1) - \log(x) \le \frac{1}{x}$$
für alle $x \in [1,\infty)$.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & x \in (0,\infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$
gegeben. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

c) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz.
$$\int_0^\infty x^x \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Hinweis. Zeigen Sie: $\exists\, c > 0\ \forall\, x \ge c : x^x \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 4 ($(5+5)+10=20$ Punkte)

a) Wir betrachten das Anfangswertproblem
$$y'(x) = xy(x) + xy^2(x), \quad y(0) = 1.$$

(i) Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems auf einem Intervall I und es gelte $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Wir definieren $z\colon I \to \mathbb{R}$ durch $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. Zeigen Sie, dass z eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt.

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$z'(x) = -xz(x) - x, \quad z(0) = 1.$$

b) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.

Viel Erfolg!