Modulprüfung
Höhere Mathematik 1 für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ($6 + (4 + 3) + 7 = 20$ Punkte)

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv durch $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

b) (i) Geben Sie eine Funktion $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ an, die surjektiv und stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ gibt, die bijektiv und stetig ist.

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - n} x^n$ konvergiert.

Lösung.

a) Es gilt

$$a_1 = 1 \geq \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2-1} \quad \text{und} \quad a_2 = 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Es gelte $a_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Damit folgt

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

da $\frac{5}{2} \geq \frac{9}{4}$. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.

b) (i) Wir betrachten $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{1-x}\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$. Es ist klar, dass f als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Außerdem gilt $f\left(1 - \frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^n \pi n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Zwischenwertsatz gilt somit

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-(2n+1)\pi, 2n\pi] \subseteq f([0,1)),$$

d.h., f ist surjektiv.

(ii) Sei $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen f wäre bijektiv. Setze $y_0 = f(0)$. Da f surjektiv ist, gibt es $x_1, x_2 \in (0,1)$ mit $f(x_1) = y_0 + 1$ und $f(x_2) = y_0 - 1$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein ξ zwischen x_1 und x_2 mit $f(\xi) = y_0 = f(0)$. Somit ist f nicht injektiv. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass f bijektiv ist. Folglich existiert kein f mit den geforderten Eigenschaften.

c) Wir setzen $a_n = \frac{1}{2n^2 - n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 - n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{2 + n^{-1} + n^{-2}}{2 - n^{-1}}\right| = 1.$$

Somit hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius 1. Sei nun $x \in \{1, -1\}$. Dann gilt

$$|a_n x^n| \leq |a_n| = \frac{1}{2n^2 - n} \leq \frac{1}{n^2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergiert. Wir erhalten also insgesamt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ genau dann konvergiert, wenn $x \in [-1, 1]$ gilt. $\square$

Aufgabe 2 **(**$(2+2+4)+(3+3)+(3+3) = 20$ Punkte**)**

a) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$ und $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig konvergiert.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (g_n) gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\sin(2x)}$. (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{\sin(x)-x}$.

c) Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen.

(i) $\displaystyle\int 2x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$. (ii) $\displaystyle\int x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

a) (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Somit haben wir gezeigt, dass (f_n) punktweise konvergiert.

(ii) Wir definieren $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist f nicht stetig. Da aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist, kann die Folge (f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

(iii) Sei $x \in [0,1]$. Mit dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ mit

$$\left|\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \left|\arctan\left(\frac{x}{n}\right) - \arctan(0)\right| = \left|\frac{1}{n} \cdot \frac{x}{1+\frac{\xi^2}{n^2}}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist ein Nullfolge. Somit folgt, dass die Funktionenfolge (g_n) gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

b) (i) Die Funktionen $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$ und $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(2x)$ sind stetig differenzierbar und es gilt $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (-1,1)$. Mit der Regel von L'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Mit den Potenzreihenentwicklungen der Exponential- und der Sinusfunktion erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{\sin(x)-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{3n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{3(n-1)}}{x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n-2}} = -6.$$

c) (i) Mit der Substitution $t = x^2$ berechnen wir

$$\int 2x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + C = -\cos(x^2) + C.$$

(ii) Durch zweimalige partielle Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x &= \int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x^2\cos(2x)\\ &= -\frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}x^2\cos(2x)\\ &= \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}x^2\cos(2x) + C. \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 3 ($4+8+8=20$ Punkte)

a) Zeigen Sie
$$\frac{1}{x+1} \le \log(x+1) - \log(x) \le \frac{1}{x}$$
für alle $x \in [1, \infty)$.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$
gegeben. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

c) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz.
$$\int_0^\infty x^x \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x.$$
Hinweis. Zeigen Sie: $\exists\, c > 0\ \forall\, x \ge c : x^x \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x}$.

Lösung.

a) Sei $x \in [1, \infty)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x, x+1)$ mit $\log(x+1) - \log(x) = \frac{1}{\xi}$. Daraus folgt unmittelbar die gewünschte Ungleichung
$$\frac{1}{x+1} \le \log(x+1) - \log(x) \le \frac{1}{x}.$$

b) Es ist klar, dass f auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ und auf dem Intervall $(0, \infty)$ stetig differenzierbar ist. Hierbei gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$ und $f'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$ für alle $x \in (0, \infty)$. Als nächstes betrachten wir den Differenzenquotienten im Nullpunkt. Es gilt
$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$
und
$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-1/x} = \lim_{y \to \infty} y\mathrm{e}^{-y} = 0.$$
Somit ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$. Schließlich gilt
$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = 0 = f'(0)$$
und
$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} = \lim_{y \to \infty} y^2\mathrm{e}^{-y} = 0 = f'(0).$$
Dies zeigt, dass die Funktion f' in 0 stetig ist. Insgesamt ist damit gezeigt, dass f stetig differenzierbar ist.

c) Wir betrachten zunächst die Funktion $h\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = x - 1 - \log(x)$. Es gilt $h(1) = 0$ und $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ für alle $x \geq 1$. Damit ist h monoton wachsend und es folgt $h(x) = x - 1 - \log(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$. Aus $x - \log(x) \geq 1$ folgt somit

$$x^x \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x(x-log(x))} \leq \mathrm{e}^{-x} \quad \text{für alle } x \geq 1.$$

Außerdem ist das uneigentlich Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ konvergent, da

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty} 1 - \mathrm{e}^{-R} = 1$$

gilt. Das Majorantenkriterium liefert somit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty x^x \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. $\square$

Aufgabe 4 **(**$(5+5)+10 = 20$ Punkte**)**

a) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = xy(x) + xy^2(x), \quad y(0) = 1.$$

(i) Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems auf einem Intervall I und es gelte $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Wir definieren $z\colon I \to \mathbb{R}$ durch $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. Zeigen Sie, dass z eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt.

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$z'(x) = -xz(x) - x, \quad z(0) = 1.$$

b) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung.

a) (i) Wir berechnen mit der Kettenregel und unter Verwendung der Differentialgleichung

$$z'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{xy(x) + xy^2(x)}{y(x)^2} = -xz(x) - x.$$

Dies ist die Form einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung.

(ii) Man sieht, dass $z_p(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $z'(x) = -xz(x)$ lautet $z_h(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $z(0) = 1$ erhält man die Lösung

$$z(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2/2} - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b)$ durch die folgenden Schritte in Zeilennormalform um.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & \alpha-2 \end{pmatrix} \quad \mid \cdot(-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-6 \end{pmatrix}.$$

Hieraus können wir direkt die gewünschten Informationen ablesen. Wir sehen $\operatorname{rg} A = 2$ und

$$\operatorname{Kern} A = \operatorname{lin}\{(-1,2,-1)^\mathsf{T}\}.$$

Außerdem können wir die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ablesen. Falls $\alpha \neq 6$, hat die erweiterte Matrix den Rang 3 und somit hat in diesem Fall das Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung. Falls $\alpha = 6$, so gibt es unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems und die Lösungsmenge lautet

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-t \\ 1+2t \\ -t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \square$$