Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann

WS2020/21
23.03.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Hauptklausur

Aufgabe 1: [8+(4+8)=20 Punkte]

(a) Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

(b) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

i) Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge auf $[0,1]$ punktweise konvergiert. Geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

ii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf gleichmäßige Konvergenz auf den Intervallen $\left[\frac{1}{2},1\right]$ und $[0,1]$.

Aufgabe 2: [(2+2+2)+6+(6+2)=20 Punkte]

(a) Geben Sie Beispiele an für

(i) eine stetige, aber nicht differenzierbare Funktion,

(ii) eine injektive, aber nicht bijektive Funktion,

(iii) eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe.

Begründen Sie jeweils, weshalb Ihre Bespiele geeignet sind.

(b) Betrachten Sie die Funktion $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass die Funktion h auf $[-1,1]$ differenzierbar ist.

(c) Es seien $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen.

(i) Sei $\int_{-1}^{1} \max\{f(x) - g(x), 0\}\,\mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie, dass $f \leq g$ auf $[-1,1]$ gilt.

(ii) Kann für die Aussage in (i) die Stetigkeit von f und g durch Integrierbarkeit ersetzt werden?

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3: [10+(5+5)=20 Punkte]

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n$$

und bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen diese Potenzreihe konvergiert.

(b) Entscheiden Sie, ob die uneigentlichen Integrale

(i) $\int_0^\infty e^{-x} \sin(2x)\, dx$

(ii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)^2}\, dx$

konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des uneigentlichen Integrals.

Aufgabe 4: [5+4+(5+3+3)=20 Punkte]

(a) Geben Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems an:

$$y'(x) = y(x) + e^{-x}, \quad y(0) = 0.$$

(b) Seien die stetig differenzierbaren Funktionen $b_1, b_2, b_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$b_1(x) = 1, \qquad b_2(x) = \sin(x)^2, \qquad b_3(x) = \sin(2x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind im reellen Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$.
Hinweis: Schreiben Sie den "Nullvektor" $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n(x) = 0$, als Linearkombination der drei Funktionen und zeigen Sie, dass dies nur für eine triviale Linearkombination möglich ist.

(c) Seien $b_1, b_2, b_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in (b) und sei $V := \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$ der von ihnen in $C^\infty(\mathbb{R})$ aufgespannte Untervektorraum. Sei die lineare Abbildung $\phi : V \to C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch $\phi(f) = f' + f$ für $f \in V$.

(i) Zeigen Sie, dass $\phi(V) \subseteq V$ gilt.
Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass $\phi(b_j) \in V$ für $j = 1, 2, 3$. Verwenden Sie Additionstheoreme.

(ii) Geben Sie die Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von $\phi : V \to V$ bzgl. der Basis b_1, b_2, b_3 in Argument- und Zielraum an.

(iii) Ist A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Falls Sie die Darstellungsmatrix in (ii) nicht gefunden haben, dann verwenden Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!