

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Musterlösung zur Hauptklausur

Aufgabe 1:

- (a) Falls die Folge konvergiert ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2} \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

und damit

$$a = \sqrt{2} \sqrt{a} \Rightarrow a = 2 \text{ oder } a = 0.$$

Wir zeigen im Folgenden, dass die Folge konvergiert und dass $a = 2$ gilt. Wir stellen zunächst fest, dass $a_n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ da $a_1 = 5$. Wir zeigen, dass die Folge monoton fallend ist. Es ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2a_n} - a_n = \frac{2a_n - a_n^2}{\sqrt{2a_n} + a_n} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2a_n \leq a_n^2 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq a_n \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $a_n > 2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt man induktiv. Für $n = 1$ ist $a_1 = 5$ und damit ist der Induktionsanfang erfüllt. Wir nehmen an es gälte die Behauptung $a_n \geq 2$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$. Wir führen nun unter dieser Annahme den Induktionsschritt. Es ist

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \geq \sqrt{4} = 2.$$

Da die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist, folgt die Konvergenz direkt nach dem Monotoniekriterium. Da $a_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$ kommt $a = 0$ als Grenzwert nicht in Frage. Es ist also $a = 2$.

- (b) Wir klären zunächst gegen welche Grenzfunktion die Funktionsfolge konvergiert. Wir unterscheiden hierzu zwei Fälle.

- Für $x = 0$ ist $f_n(0) = 0$ und damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$.
- Für $x > 0$ ist $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}$. Um den Grenzwert zu bestimmen fassen wir n als kontinuierlichen Parameter auf. Die Regel von L'Hospital ist anwendbar, da Zähler und Nenner gegen $+\infty$ divergieren. Es ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{nx^2} x^2} = 0$$

Damit ist klar, dass die Funktionsfolge punktweise gegen die konstante Nullfunktion konvergiert.

Wir zeigen, dass die Funktionsfolge auf $[\frac{1}{2}, 1]$ gleichmäßig konvergiert. Als Grenzfunktion kommt nur die konstante Nullfunktion in Frage. Wir bestimmen den Abstand in der Supremumsnorm. Es ist

$$\sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} nxe^{-nx^2} \leq ne^{-\frac{n}{4}} = \frac{n}{e^{\frac{n}{4}}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

wobei man den Grenzwert wie zuvor mit L'Hospital begründet. Damit folgt die gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$.

Wir zeigen noch, dass die Folge auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig konvergiert. Es ist

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1]} nxe^{-nx^2} \geq e^{-\frac{n}{n^2}} = e^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Hierbei wurde $x = \frac{1}{n}$ für die obige Ungleichung gewählt. Da der Abstand in der Supremumsnorm nicht verschwindet kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

Aufgabe 2:

- (a) (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist stetig aber in $x = 0$ trivialerweise nicht differenzierbar.
- (ii) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist injektiv aber nicht surjektiv und damit nicht bijektiv.
- (iii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ ist nach Leibniz konvergent aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergiert nach Vorlesung.
- (b) Für $x > 0$ und $x < 0$ ist die Funktion als Komposition differenzierbarer Funktionen nach den Mitteln der Vorlesung differenzierbar. Es ist nur zu prüfen ob die Funktion in $x = 0$ differenzierbar ist. Wir prüfen den Differenzenquotienten,

$$\frac{h(0+t) - h(0)}{t} = \frac{h(t)}{t}.$$

Die Funktion ist in $x = 0$ differenzierbar falls der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{t}$ existiert. Es ist für den Grenzwert,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos(t^{-1})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cos(t^{-1}) = 0.$$

Die letzte Gleichheit folgt sofort nach dem Sandwichkriterium, da $0 \leq |t \cos(t^{-1})| \leq |t| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$.

Damit ist die Abbildung in $x = 0$ differenzierbar mit $h'(0) = 0$.

- (c) (i) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir definieren zunächst die stetige Abbildung

$$u(x) := f(x) - g(x).$$

Angenommen es ex. ein $x_0 \in [-1, 1]$ mit $u(x_0) > 0$ dann ex ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ sodass $u(x) > \delta$ für jedes $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, da u stetig ist. Es ist also für $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

$$\max\{u(x), 0\} \geq \delta.$$

Es ist also für das Integral

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 \max\{u(x), 0\} dx \geq \int_{\max\{-1, x_0 - \varepsilon\}}^{\min\{1, x_0 + \varepsilon\}} \max\{u(x), 0\} dx \\ &\geq \delta (\min\{1, x_0 + \varepsilon\} - \max\{-1, x_0 - \varepsilon\}) \end{aligned}$$

Falls $|x_0| \neq 1$ kann man ε klein genug wählen sodass $\min\{1, x_0 + \varepsilon\} = x_0 + \varepsilon$ und $\max\{-1, x_0 - \varepsilon\} = x_0 - \varepsilon$. Daher ist $0 \geq 2\delta\varepsilon > 0$ was ein Widerspruch ist. Es folgt also die Behauptung. Sei nun noch $|x_0| = 1$. In diesem Fall existiert ein $\tilde{x}_0 \in (-1, 1)$ mit $u(\tilde{x}_0) > 0$ da u stetig ist. Es folgt also die Behauptung analog zum vorherigen Fall.

(ii) Wir können nicht auf die Stetigkeit verzichten. Wähle zum Beispiel $g \equiv 0$ und

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

dann sind beide Funktionen Riemann-Integrierbar, aber es ist

$$\int_{-1}^1 \max\{f(x) - g(x), 0\} dx = 0$$

und $f(0) > g(0)$. Beachten Sie, dass für die korrekte Beantwortung der Frage eine Begründung notwendig ist.

Aufgabe 3:

(a) Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius der Potenzreihe. Sei hierzu

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Wir bestimmen den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t} - 1}$$

Da sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 konvergieren können wir die Regel von L'Hospital anwenden. Es ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{1/2} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{1-t} \right)^{1/2} = 1.$$

Da der Quotient konvergiert ist der Konvergenzradius $R = 1$. Damit konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in (-1, 1)$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ müssen wir die Konvergenz gesondert überprüfen. Wir betrachten zunächst den Fall $x = 1$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} = \infty. \end{aligned}$$

Wir haben verwendet, dass die Reihe eine Teleskopsumme ist und erkennen, dass die Potenzreihe für $x = 1$ divergiert. Wir prüfen noch den Fall $x = -1$. Es ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Wir versuchen das Leibniz-Kriterium anzuwenden. Es ist also zu zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Zunächst erkennen wir, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann für $n > 1$,

$$0 \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Die Folge ist monoton fallen für $n \geq 2$, denn

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= -2\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \\ &< -3\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Beachte, es ist $-3\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 0$ für $n \geq 2$, denn

$$\begin{aligned} -3\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{n+1} &\leq 3\sqrt{n-1} \\ \Leftrightarrow n+1 &\leq 9(n-1) \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{10}{8}. \end{aligned}$$

Daher konvergiert die Reihe für $x = -1$. Es gilt also insgesamt, dass die Potenzreihe für $x \in [-1, 1)$ konvergiert und ansonsten divergiert.

- (b) (i) Wir zeigen, dass das Integral konvergiert. Wir müssen also den Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} \sin(2x) dx$$

bestimmen. Um das Integral zu lösen benutzen wir partielle Integration. Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-x} \sin(2x) dx &= [-e^{-x} \sin(2x)]_0^R + 2 \int_0^R e^{-x} \cos(2x) dx \\ &= -e^{-R} \sin(2R) + 2 \int_0^R e^{-x} \cos(2x) dx \\ &= -e^{-R} \sin(2R) + 2 [-e^{-x} \cos(2x)]_0^R - 4 \int_0^R e^{-x} \sin(2x) dx. \end{aligned}$$

Man bringt das Integral auf die linke Seite und bestimmt den Grenzwert als

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(2x) dx = \frac{2}{5}.$$

- (ii) Wir zeigen, dass das Integral divergiert. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)^2} dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)^2} dx = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)^2} dx \\ &\geq 2 \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{\pi/2} \frac{1}{x^2} dx = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{\pi} + \frac{1}{t} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Wir haben verwendet, dass $\sin(x) \leq x$ für $x \in [0, \infty)$. Das uneigentliche Integral divergiert also nach dem Minorantenkriterium.

Aufgabe 4:

- (a) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$y_H'(x) = y_H(x).$$

Mittels Trennung der Variablen findet man sofort die Lösung

$$y_H(x) = Ae^x.$$

Wobei $A \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter ist. Wir machen einen Ansatz für die inhomogene DGL um die Variation der Konstante durchzuführen. Dieser Ansatz ist

$$y_p(x) = A(x)e^x.$$

Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$A'(x)e^x + A(x)e^x = A(x)e^x + e^{-x} \Rightarrow A'(x) = e^{-2x} \Rightarrow A(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

für eine Konstante C . Da wir nur eine Lösung der inhomogenen Gleichung benötigen können wir $C = 0$ wählen. Eine partikuläre (inhomogene) Lösung lautet also

$$y_p(x) = A(x)e^x = -\frac{1}{2}e^{-x}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich aus der Summe von homogener und inhomogener Lösung als,

$$y(x) = Ae^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

Aus dem Anfangswert $y(0) = 0$ bestimmen wir nun noch die Konstante A . Es ist

$$0 = A - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Die Lösung $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ eine Lösung der angegebenen DGL. (Wie man leicht explizit überprüft).

- (b) Um zu prüfen ob die angegebenen Funktionen linear unabhängig sind versuchen wir eine nichttriviale Darstellung des "Nullvektor" $n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ zu finden. Es seien also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} 0 = n(x) &= \alpha b_1(x) + \beta b_2(x) + \gamma b_3(x) \\ &= \alpha + \beta \sin(x)^2 + \gamma \sin(2x) \end{aligned}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Also gilt insbesondere für $x = 0, \alpha = 0$. Als nächstes wählen wir $x = \pi/2$ und folgern mit $\alpha = 0$, dass auch $\beta = 0$ gelten muss. Für $x = \pi/4$ folgt daher $\gamma = 0$. Daher sind die Funktionen linear unabhängig.

- (c) a) Wir prüfen ob das Bild der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ in V ist. Nach dem Hinweis genügt es zu zeigen, dass $\Phi(b_j) \in V$ für $j = 1, 2, 3$. Es ist

$$\Phi(b_1)(x) = b_1(x) \in V$$

$$\Phi(b_2)(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + \sin(x)^2 = \sin(2x) + \sin(x)^2 = b_3(x) + b_2(x) \in V$$

$$\begin{aligned} \Phi(b_3)(x) &= 2 \cos(2x) + \sin(2x) = 2(1 - 2 \sin(x)^2) + \sin(2x) \\ &= 2 - 4 \sin(x)^2 + \sin(2x) = 2b_1(x) - 4b_2(x) + b_3(x) \in V \end{aligned}$$

- b) Wir bestimmen die Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bezüglich der in (b) gegebenen Basis. Analog zur Vorlesung erhalten wir die Spalten der Darstellungsmatrix aus den Identitäten in (i). Es ist:

$$\Phi(b_1)(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_1(x) + 0 \cdot b_2(x) + 0 \cdot b_3(x)$$

$$\Phi(b_2)(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1(x) + 1 \cdot b_2(x) + 1 \cdot b_3(x)$$

$$\Phi(b_3)(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1(x) + -4 \cdot b_2(x) + 1 \cdot b_3(x)$$

Damit finden wir also die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Wir zeigen das die Matrix Regulär ist. Nach Vorlesung genügt es zu zeigen, dass die Matrix vollen Rang hat. Wir führen eine Zeilenumformung durch um die Matrix in Treppenform zu bringen. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

indem man die zweite Zeile von der letzten abzieht. Man kann den Rang der Matrix nun direkt ablesen. Es ist $\text{Rang}(A) = 3$. Damit hat die Matrix vollen Rang und ist damit invertierbar.