Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann

WS2020/21
16.09.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Nachklausur

Aufgabe 1: [4+8+8=20 Punkte] Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

(a) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = (1-i)\sum_{k=0}^{n-1} i^k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei $i^2 = -1$ die imaginäre Einheit bezeichnet.

(b) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+(-1)^k)^k(x-1)^k \ .$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

(c) Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch die Vorschrift

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \quad n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Zeigen Sie, dass die Folge für $0 \le a_0 \le \frac{1}{2}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert. Zeigen Sie, dass die Folge für $a_0 > \frac{1}{2}$ divergiert.

Aufgabe 2: [(2+2+4)+(4+8)=20 Punkte]

(a) Geben Sie im Folgenden geeignete Beispiele an und begründen Sie, weshalb es geeignete Beispiele sind. Geben Sie Beispiele für

(i) eine Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, die punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

(ii) eine beschränkte Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht integrierbar ist.

(iii) zwei Untervektorräume U_1, U_2 eines $\mathbb{K}$-Vektorraums W so, dass $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum ist. Hierbei ist $U_1 \cup U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2\}$.

(b) Betrachten Sie die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f in $[0,\infty)$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: [10+10=20 Punkte]

(a) Lösen Sie die Anfangswertprobleme

i) $y'(x) = 2x - y(x) + 3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0,$

ii) $y''(x) + y'(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2}.$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$. Entscheiden Sie ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}}{(1+x^2)^k}\, dx$$

konvergent ist und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

HINWEIS: Substituieren Sie im eigentlichen Integral $x = \tan(u)$. Beachten Sie: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Aufgabe 4: [4+4+6+6=20 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass durch $(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf $C^\infty([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ gegebenen ist.

(b) Seien $b_1(x) = \sin(x),\ b_2(x) = x$ für $x \in [-\pi,\pi]$. Zeigen Sie, dass b_1 und b_2 in $C^\infty([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

(c) Bestimmen Sie orthogonale Funktionen $v_1, v_2 \in C^\infty([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ so, dass gilt

$$\operatorname{lin}\{v_1, v_2\} = \operatorname{lin}\{b_1, b_2\}.$$

(d) Es sei $b_3(x) = \cos(x)$. Bestimmen Sie den minimalen Abstand

$$\min\{\|b_3 - p\| : p \in U\},$$

wobei $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2\} = \operatorname{lin}\{b_1, b_2\}$. Beachten Sie dabei $\|f\|^2 = (f|f)$.

Viel Erfolg!