Musterlösung zur HM I Nachklausur 16.09.21

Wednesday, 1. September 2021 11:26

Aufgabe 1

a) Wir erkennen, dass es sich um die geometrische Reihe handelt.

Es ist $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k = \frac{1}{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda-1)\lambda^k = \frac{1}{\lambda-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k+1} - \lambda^k}_{\text{Teleshopsumme}}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k = \frac{1}{\lambda-1}(-1+\lambda^n)$$

$$= \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

für $\lambda = i$ ist also $\sum_{k=0}^{n-1} i^k = \frac{i^n - 1}{i-1}$

$$\Rightarrow \quad a_n = (1-i)\sum_{k=0}^{n-1} i^k = 1 - i^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Um die Häufungswerte zu bestimmen, betrachten wir Teilfolgen

Es ist

$$a_{4n} = 1 - i^{4n} = 1 - (-1)^{2n} = 1 - 1 = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$a_{4n+1} = 1 - i\, i^{4n} = 1 - i \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1 - i$$

$$a_{4n+2} = 1 - i^2 i^{4n} = 1 + i^{4n} = 2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 2$$

$$a_{4n+3} = 1 - i^3 i^{4n} = 1 + i\, i^{4n} = 1+i \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1+i$$

Die HW von a_n sind also $\{0, 2, 1+i, 1-i\}$

Es kann keine weiteren HW geben da jede weitere konvergente TF für "n groß genug" eine TF der oben angegebenen TF sein müsste! (nach VL).

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (1+(-1)^k)^k (x-1)^k$

Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Nach VL ist

$$1/\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad \text{für } a_n = (1+(-1)^n)^n$$

der Konvergenzradius, falls der limes superior ex.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \limsup_{n\to\infty} (1+(-1)^{2n})$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \quad \varrho = 1/2$$

Nach VL konv. die Reihe also für $|x-1| < 1/2$ absolut.

$$|x-1| < 1/2 \iff x \in (1/2, 3/2)$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus [1/2, 3/2]$ ist die Reihe divergent

Die Fälle $x = 1/2$ und $x = 3/2$ müssen als Spezialfälle einzeln betrachtet werden

$x = 1/2$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^k)^k}{2^k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{2^{2k}}(-1)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ ist divergent.

$x = 3/2 :$ $\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^K)^K}{2^K} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{2^{2k}} = \sum_{K=0}^{\infty} 1$ ist divergent.

c)

Wir nehmen zunächst an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. mit $a_n \to a \in \mathbb{R}$ sodass

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

D.h $a = \frac{1}{2}$ ist der einzige Grenzwert der in Frage kommt.

Sei nun $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$.

Wir zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt.

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = (a_n - \tfrac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$$

Um zu zeigen, dass a_n nach oben beschränkt ist führen wir eine vollständige Induktion durch.

zu zeigen $a_n \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

IA: $a_0 \leq \frac{1}{2}$ ✓

IV: Es gelte $a_n \leq \frac{1}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bel. aber fest.

IS: $n \rightsquigarrow n+1$

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \underset{I.V}{\leq} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Nach dem Monotonie-krit konv. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es bleibt zu zeigen, dass für $a_0 > \frac{1}{2}$ die Folge div.

Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv., dann ist $a_n \to a = \frac{1}{2}$ für $n\to\infty$ $\otimes$

Beachte: $\underbrace{a_n \geq a_0 > \tfrac{1}{2}}_{\text{a_n ist mon. wachsend!}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \geq a_0 > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad a > \frac{1}{2}$ ↯

Aufgabe 2:

a)

i) $f_n(x) = x^n$, dann gilt f_n ist stetig auf $[0,1]$ und

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} =: f(x)$$ mit $f_n \to f$ punktweise.

f ist in $x=1$ unstetig.

Da f_n stetig $\forall n \in \mathbb{N}$ und f unstetig

$\Rightarrow$ f_n konv. nicht glm. auf $[0,1]$

ii) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1 & x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \end{cases}$.

$\Rightarrow$ $f \leq 1$ auf $[0,1]$ und f ist nicht integrierbar, denn

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{I_n} f\Big)|I_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| = |[0,1]| = 1$$

abe $\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \inf_{I_n} f\Big)|I_n| = 0.$

Das gilt für jede Zerlegung $I_n = [x_n, x_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \le x_n < x_{n+1} \le 1$.

iii) Wir betrachten den Vektorraum $W = \mathbb{R}^2$ mit den üblichen Verknüpfungen $(+,\cdot)$. Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ ist ein Untervektorraum. z.B.

$$U_1 = \{(t,0)^T \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad U_2 = \{(t,t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$$

U_1, U_2 sind UVR (Abg. bzg + und $(0,0)$ ist enthalten)

$$U_1 \cup U_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v \in U_1 \text{ ode } v \in U_2\}$$

$\Rightarrow (1,0)^T \in U_1 \cup U_2$ and $(1,1)^T \in U_1 \cup U_2$

Es ist $(1,0)^T + (1,1)^T = (2,1)^T \notin U_1 \cup U_2$ und damit ist $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum.

b)

$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ für $x > 0$ mit $f(0) = a$

a) Es ist für jede Folge mit $x_n \to 0$

$$|f(x_n) - f(0)| = |x_n^2 \sin(\tfrac{1}{x_n}) - 0|$$
$$= |x_n^2 \sin(\tfrac{1}{x_n})| \le |x_n|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ f ist in $x=0$ stetig

b) Differenzierbarkeit:

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x}\right|$$
$$= |x \sin(\tfrac{1}{x})| \le |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$$

D.h f ist in $x=0$ differenzierbar

Bestimme Ableitung in $x \neq 0$

$$(x^2 \sin(\tfrac{1}{x}))' = 2x \sin(\tfrac{1}{x}) + x^2 \cos(\tfrac{1}{x}) \frac{-1}{x^2}$$
$$= 2x \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Angenommen $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ex., dann ist für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim_{n\to\infty} f'(\tfrac{1}{n\pi}) = \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi) - \cos(n\pi)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

Falls f' in $x=0$ stetig wäre müsste also $\lim_{n\to\infty} f'(\frac{1}{n\pi}) = 0$ gelten, abe $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$.

A3 a

i) $y'(x) = 2x - y(x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$ $y(0) = 0$ Wir substituieren zunächst:

Definiere $u(x) =: 2x - y(x) \Rightarrow u'(x) = 2 - y'(x)$

$\Rightarrow y'(x) = 2 - u'(x)$

$\Rightarrow$ $2 - u'(x) = u(x) + 3$

$\Rightarrow$ $u'(x) + u(x) = 1$ ⊛

Dies ist eine inhomogene DGl 1. Ordnung.
Wir lösen zunächst das homogene Problem

$u_h'(x) + u_h(x) = 0$

$\Rightarrow u_h'(x) = -u_h(x) \Rightarrow u_h(x) = Ae^{-x}$ oder $u(x) = 0$

Wir finden eine Lösung des inhomogenen Problems

$u_p'(x) + u_p(x) = 1$

mit dem Ansatz $u_p(x) \equiv c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $c = 1$ d.h $u_p(x) = 1$ ist partikuläre LSG.

$\Rightarrow$ $u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Ae^{-x} + 1$ bzw $u(x) = 0 + 1 = 1$

Anfangswerte $u(0) = 2 \cdot 0 - y(0) = 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow$ $Ae^0 + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$ bzw $\underbrace{u(0) = 1}_{\text{Kann AWP nicht lösen}}$

$\Rightarrow$ $u(x) = -e^{-x} + 1$ ist LSG von ⊛

$y(x) = 2x - e^{-x} + 1$

ii) $y''(x) + y'(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$

Wir substituieren $y'(x) = u(x)$

$\Rightarrow$ $u'(x) + u(x) = \sin(x)$

Dies ist eine inhomogene lineare DGl 1. Ordnung
Wir lösen zunächst das homogene Problem

$u_h'(x) + u_h(x) = 0 \Rightarrow u_h(x) = Ae^{-x}$ bzw $u_h(0) = 0$

Durch Variation der Konstante erhalten wir einen Ansatz für das inhomogene Problem

$u_p(x) = A(x)e^{-x} \Rightarrow u_p'(x) = A'(x)e^{-x} - A(x)e^{-x}$

Einsetzen liefe

$u_p'(x) + u_p(x) = \sin(x) \Rightarrow A'(x)e^{-x} = \sin(x)$

$\Rightarrow A'(x) = \sin(x)e^{x}$

Durch Integration finden wir

$$A(x) = \int_0^x \underbrace{\sin(t)}_{f'}\underbrace{e^t}_{g}\,dt$$

$$\overset{P.I}{=} [e^t(-\cos(t))]_0^x + \int_0^x \overbrace{\cos(t)}^{f}\overbrace{e^t}^{g'}\,dt$$

$$= -e^x\cos(x) + 1 + [\sin(t)e^t]_0^x - \int_0^x \sin(t)e^t\,dt$$

$\Rightarrow$ $2A(x) = e^x(\sin(x) - \cos(x)) + 1$

$\Rightarrow$ $A(x) = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}$

d.h $u_p(x) = \left(\frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$

$= \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}e^{-x}$ ist partikuläre LSG

Test:

$$u_p'(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad u_p'(x) + u_p(x) = \sin(x) \quad ✓$$

Die LSG ergibt sich aus homogener + patikuläre LSG zu

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Ae^{-x} + \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x)) - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad u(0) = A - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0+1) = A - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = A$$

$\Rightarrow \quad A=0$ da $y'(0) = u(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x)) - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x)) - \frac{1}{2}e^{-x}$$

Durch Integration finden wir

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}e^{-x} + C$$

und mit $y(0)=0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{2} + C = C$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{2}e^{-x}$$

Probe $y'(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) - \frac{1}{2}e^{-x}$

$\Rightarrow \quad y(x) + y'(x) = \sin(x)$ D.h y erfüllt das AWP.

b)

Wir zeigen zunächst, dass das Integral existiert.

$$\int_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}}{(1+x^2)^k}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^1 \underbrace{\frac{x^{2(k-1)}}{(1+x^2)^k}}_{\le x^{2(k-1)}<1} dx + \int_1^R \underbrace{\frac{x^{2k}}{(1+x^2)^k}}_{\le 1} x^{-2}dx\right.$$

$$\le 1 + \lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-2}dx = 1 + \left[\frac{-1}{x}\right]_0^\infty = 2$$

Wir bestimmen nun den Wert des Integrals:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}}{(1+x^2)^k}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x^{2(k-1)}}{(1+x^2)^k}dx$$

$$\underset{x=\tan(u)}{=} \lim_{R\to\infty}\int_0^{\arctan(R)} \frac{\tan(u)^{2(k-1)}}{(1+\tan^2(u))^k}(1+\tan^2(u))\,du$$

$$= \lim_{\varphi\to\pi/2}\int_0^\varphi \frac{\tan(u)^{2(k-1)}}{(1+\tan^2(u))^{k-1}}du$$

$$= \lim_{\varphi\to\pi/2}\int_0^\varphi \tan(u)^{2(k-1)}\cos(u)^{2(k-1)}du$$

$$= \lim_{\varphi\to\pi/2}\int_0^\varphi \sin(u)^{2(k-1)}du$$

NR:

$$\partial_u \tan(u) = \partial_u \frac{\sin(u)}{\cos(u)}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}$$

$$= 1 + \tan^2(u)$$

$$= \frac{\cos^2(u)+\sin^2(u)}{\cos^2(u)}$$

$$= \cos^{-2}(u)$$

Für $k=1$ ist also $\lim_{\varphi\to\pi/2}\int_0^\varphi \sin(u)^0 du = \frac{\pi}{2}$

für $k>1$ leiten wir eine Rekursionsformel mit P.I her.

Es ist $k \rightsquigarrow k+1$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2((k+1)-1)}\,du = \int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2k}\,du$$

$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(u)}_{f'}\ \underbrace{\sin(u)^{2k-1}}_{g}\,du$$

$$\underset{P.I}{=} \left[-\cos(u)\sin(u)^{2k-1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(u)^2 (2k-1) \sin(u)^{2k-2}\,du$$

$$\underset{1=\sin^2+\cos^2}{=} (2k-1) \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(u)) \sin(u)^{2k-2}\,du$$

$$= (2k-1) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2k-2} du - \int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2k}\,du \right.$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1+(2k-1))}_{=2k} \int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2((k+1)-1)}\,du = (2k-1) \int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2(k-1)}\,du$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2((k+1)-1)}\,du = \frac{2k-1}{2k} \int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2(k-1)}\,du$$

$I_k := \int_0^{\pi/2} \sin(u)^{2(k-1)}\,du$, dann ist $I_1 = \frac{\pi}{2}$ und

'' $I_{k+1} = \frac{2k-1}{2k} I_k$ ''

$$= \frac{2k-1}{2k} I_{(k-1)+1} = \frac{2k-1}{2k}\,\frac{2(k-1)-1}{2(k-1)} I_{k-1} = \ldots$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \prod_{n=0}^{k-1} \frac{2(k-n)-1}{2(k-n)} \underbrace{I_1}_{=\pi/2} = \frac{\pi}{2} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{2(k-n)-1}{2(k-n)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} I_{k+1} = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{k} \frac{2n-1}{2n} & \text{für } k \geq 1 \\ I_1 = \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

A4,

a) Wir zeigen, dass $(f|g)$ ein Shalarprodukt ist.

Symmetrie $(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)f(x)\,dx = (g|f)$

liniarität $(f+g|h) = (f|h) + (g|h)$ gilt nach lin. des Integrals

homogenität $(\lambda f|g) = \lambda (f|g)$ gilt nach hom. des Integrals

pos. definitheit $(f|f) = \int |f|^2 dx \geq 0$ und:

$(f|f) = 0 \Rightarrow f = 0$

$(f|f) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(x)|^2}_{\geq 0} dx = 0$. Angenommen $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in [-\pi,\pi]$

dann ex. ein $x_0 \in (-\pi,\pi)$ sodass $f(x_0) \neq 0$ (nach stetigheit von f)

Sei $\varepsilon > 0$ sodass $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (-\pi,\pi)$ und $f(t) \geq \frac{f(x_0)}{2}$

für $t \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, dann ist

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(t)|\, dt \geq \frac{f(x_0)}{\cancel{2}} \cancel{2}\varepsilon > 0 \quad ↯$$

$\Rightarrow$ So ein x_0 kann nicht ex.

das muss erwäht werden

Für volle Punkte genügt mir: (Da f auf $[-\pi,\pi]$ stetig ist, gilt $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [-\pi,\pi]$ nach VL)

b)

$b_1(x) = \sin(x)$, $b_2(x) = x$

Falls b_1, b_2 linear abhängig sind gibt es eine nichttriviale $(n_1 \neq 0, n_2 \neq 0)$ linear kombination

$f(x) = n_1 b_1(x) + n_2 b_2(x)$ so, dass $f(x) = 0 \ \forall x \in [-\pi,\pi]$

Es sei

$0 = n_1 \sin(x) + n_2 x \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$

d.h für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt $0 = n_1 + n_2 \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow n_1 = -n_2 \frac{\pi}{2}$

und für $x = \pi$ gilt

$0 = 0 + n_2 \pi \Rightarrow n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = 0$ ↯

$\Rightarrow$ b_1 und b_2 sind lin. unabhängig.

c) Nach Gram-Schmidt können wir solche orthogonale Fkt. bestimmen: $b_1(x) = \sin(x)$, $b_2(x) = x$

Wähle $V_1 = b_1$

und $V_2 = b_2 - \frac{(V_1|b_2)}{(V_1|V_1)} V_1$

$= b_2 - \frac{(b_1|b_2)}{(b_1|b_1)} b_1$

dann gilt:

$\langle V_1, V_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle = 0$

und $\text{lin}\{V_1, V_2\} = \text{lin}\{b_1, b_2\}$

Bestimme also

$$(b_1|b_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \overset{f}{\widetilde{\sin(x)}}\, \overset{g}{\tilde{x}}\, dx \underset{\text{P.I}}{=} [-\cos(x)\, x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx$$

$$= -2\cos(\pi)\pi + \underbrace{[\sin(x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}$$

$$= 2\pi$$

und $\quad (b_1|b_1) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2(x)+\cos^2(x))\,dx = \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_2(x) = b_2(x) - \frac{2\pi}{\pi}\, b_1(x) = b_2(x) - 2b_1(x) \\ \qquad\qquad = x - 2\sin(x) \\ V_1(x) = \sin(x) \end{cases}$$

d) $\quad b_3(x) = \cos(x) \quad$ und $\quad \|f\|^2 = (f|f)$

Bestimme: $\quad \min\{\, \|b_3 - p\| \;:\; p \in \operatorname{lin}\{V_1,V_2\}\}$

Beachte: $\quad \|b_3 - p\|^2 = \|b_3\|^2 + \|p\|^2 + 2(b_3,p)$

$$\overset{\nearrow}{=} \|b_3\|^2 + \|p\|^2 \geq \|b_3\|^2 \quad \forall\, p \in \operatorname{lin}\{V_1,V_2\}$$

$(b_3|p)=0$ wegen Symmetrie ⊛ s.u.

$$\Rightarrow \quad \min\{\, \|b_3 - p\| \mid p \in \operatorname{lin}\{V_1,V_2\}\} = \|b_3\| \qquad (\text{Wähle } p=0\}$$

⊛ $\quad (b_3|p) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,p(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \cos(x)p(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} \cos(x)\,p(x)\,dx$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos(x)p(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos(-x)\,p(-x)\,dx = 0$$

und $\quad p(-x) = aV_1(-x) + bV_2(-x) \quad \} \nearrow$

$$= -p(x)$$

(Alternativ: Formel für Orthogonalprojektion aus VL)

Es ist also

$$\min\{\, \|b_3 - p\| \;:\; p \in \operatorname{lin}\{V_1,V_2\}\} = \|b_3\| = (b_3,b_3)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\pi}$$