

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik Modulprüfung

Aufgabe 1 $((7 + 7) + 6 = 20 \text{ Punkte})$.

(a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv durch

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$

für $n \in \mathbb{N}$ definiert und es gelte $a_0 = 0$ sowie $a_1 = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \frac{2}{3}((-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} + 1).$$

(ii) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+1}} x^n.$$

Aufgabe 2 $((5 + 5) + (5 + 5) = 20 \text{ Punkte})$.

(a) Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ auf $\mathbb{R}$ *punktweise* gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Bestimmen Sie f .

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ auf $\mathbb{R}$ *nicht gleichmäßig* gegen f aus Teil (i) konvergiert.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{7}{(x-2)(x^2+3)} \right).$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x}.$

Aufgabe 3 $((6 + 6) + 8 = 20 \text{ Punkte})$.

(a) Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden uneigentlichen Integrale.

(i) $\int_0^{\infty} x \sinh(x) dx.$

(ii) $\int_0^\infty x e^{-(x^2)} dx.$

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^3 \cos(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar mit stetiger Ableitung ist, das heißt, dass $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte).

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{e^{y(x)}}{x}, \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in [1, e)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!