Karlsruher Institut für Technologie

WS 2021/2022
24. März 2022
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Aufgabe 1 *((7 + 7) + 6 = 20 Punkte)*.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv durch

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$

für $n \in \mathbb{N}$ definiert und es gelte $a_0 = 0$ sowie $a_1 = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \frac{2}{3}\big((-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} + 1\big).$$

(ii) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+1}} x^n.$$

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir zeigen die Gleichheit mit vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang sehen wir durch Einsetzen, dass

$$a_0 = 0 = \frac{2}{3}\big((-1)^{0+1} \cdot 2^{-0} + 1\big) \quad \text{und}$$
$$a_1 = 1 = \frac{2}{3}\big((-1)^{1+1} \cdot 2^{-1} + 1\big).$$

Es gelte nun also die Induktionsvoraussetzung

$$a_n = \frac{2}{3}\big((-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} + 1\big) \quad \text{und}$$
$$a_{n-1} = \frac{2}{3}\big((-1)^{n} \cdot 2^{-n+1} + 1\big)$$

für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt nach Definition und mithilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \\ &= \frac{2/3((-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} + 1) + 2/3((-1)^{n} \cdot 2^{-n+1} + 1)}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} + 1 + (-1)^n \cdot 2^{-n+1} + 1}{3} \\
&= \frac{(-1)^n(-2^{-n} + 2^{-n+1}) + 2}{3} \\
&= \frac{(-1)^n \cdot 2^{-n}(-1 + 2) + 2}{3} \\
&= \frac{(-1)^n \cdot 2^{-n} + 2}{3} \\
&= \frac{2}{3}\big((-1)^{(n+1)+1} \cdot 2^{-(n+1)} + 1\big).
\end{aligned}
$$

Damit ist die Gleichheit bewiesen.

(ii) Mit dem Stoff der Vorlesung folgt, dass

$$a_n = \frac{2}{3}\big((-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} + 1\big) \to \frac{2}{3}(0 + 1) = \frac{2}{3}$$

für $n \to \infty$, da $2^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$ und $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist. Da konvergente Folgen nur ihren Grenzwert als Häufungswert haben, ist dies der einzige Häufungswert der Folge.

(b) Wir zeigen, dass der Konvergenzradius 1 beträgt.

Wir berechnen mit dem Quotientenkriterium

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}} \\
&= \sqrt{\frac{(n+2)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n+1)}} \\
&= \sqrt{\frac{n^3 + 2n^2 + n + 2}{n^3 + 3n^2 + 4n + 2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + 2n^{-1} + n^{-2} + 2n^{-3}}{1 + 3n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}}} \\
&\to 1
\end{aligned}
$$

für $n \to \infty$. Somit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe 1. (Die Aussage kann man auch mit dem Wurzelkriterium zeigen.) □

Aufgabe 2 *((5 + 5) + (5 + 5) = 20 Punkte)***.**

(a) Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $\mathbb{R}$ *punktweise* gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Bestimmen Sie f.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $\mathbb{R}$ *nicht gleichmäßig* gegen f aus Teil (i) konvergiert.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{7}{(x-2)(x^2+3)}\right)$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x)}{x}$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir setzen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f_n(x_0) = \sin\left(\frac{x_0}{n}\right) \to \sin(0) = 0$$

für $n \to \infty$, da der Sinus in 0 stetig ist. Das zeigt punktweise Konvergenz der Funktionenfolge gegen f.

(ii) Wir setzen $x_n := n\pi/2$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \left|\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right) - 0\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right| = 1.$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge nicht gleichmäßig gegen f.

(b) (i) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2} - \frac{7}{(x-2)(x^2+3)} &= \frac{1}{x-2}\left(1 - \frac{7}{x^2+3}\right)\\ &= \frac{1}{x-2}\,\frac{x^2+3-7}{x^2+3}\\ &= \frac{1}{x-2}\,\frac{(x-2)(x+2)}{x^2+3}\\ &= \frac{x+2}{x^2+3}\\ &\to \frac{2+2}{2^2+3}\\ &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

für $x \to 2$, da $(x+2)(x^2+3)^{-1}$ in 2 stetig ist.

(ii) Es sind $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\mathrm{id}'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zudem gilt $1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $\sinh(x) \to 0$ und $x \to 0$ für $x \to 0$. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)}{1} = 1$$

und somit nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)}{1} = 1. \qquad \square$$

Aufgabe 3 *((6 + 6) + 8 = 20 Punkte)***.**

(a) Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden uneigentlichen Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty x\sinh(x)\,\mathrm{d}x.$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-(x^2)}\,\mathrm{d}x.$

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^3\cos(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar mit stetiger Ableitung ist, das heißt, dass $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir berechnen mit partieller Integration und für alle $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^a x\sinh(x)\,\mathrm{d}x &= [x\cosh(x)]_{x=0}^a - \int_0^a \cosh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\cosh(a) - [\sinh(x)]_{x=0}^a \\ &= a\cosh(a) - \sinh(a) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2}(a+1) + \frac{\mathrm{e}^a}{2}(a-1).\end{aligned}$$

Da die letzte Zeile für $a \to \infty$ gegen ∞ geht, existiert das uneigentliche Integral nicht.

(ii) Sei $a > 0$. Wir setzen $y(x) = -x^2$. Dann gilt $y'(x) = -2x$ und somit mit der Substitutionsregel

$$\int_0^a x\mathrm{e}^{-(x^2)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^a -2x\mathrm{e}^{-(x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_0^{-a^2} e^y \,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} e^y \,dy \\
&= \frac{1}{2}\left[e^y\right]_{y=(-a^2)}^{0} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right) \\
&\to \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

für $a \to \infty$.

(b) Zunächst ist klar, dass die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ als Komposition von C^1-Funktionen in $C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ liegt mit

$$f'(x) = 3x^2\cos\left(x^{-1}\right) + x\sin\left(x^{-1}\right)$$

für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Wir zeigen nun die Differenzierbarkeit von f in 0. Hierzu betrachten wir den Differenzenquotienten von f in 0 und erhalten

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{x^3\cos(x^{-1}) - 0}{x}\right| = 0,$$

da $|\cos(x^{-1})|$ beschränkt ist. Somit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Um die Stetigkeit der Ableitung zu sehen, bemerken wir, dass

$$\left|f'(x)\right| = \left|3x^2\sin\left(x^{-1}\right) + x\cos\left(x^{-1}\right)\right| \le 3x^2 + |x| \to 0$$

für $x \to 0$, da $|\cos(x^{-1})|, |\sin(x^{-1})| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Somit ist

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3x^2\sin(x^{-1}) + x\cos(x^{-1}), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

die stetige Ableitung von f und f somit stetig differenzierbar. □

Aufgabe 4 *(10 + 10 = 20 Punkte)***.**

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{e^{y(x)}}{x}, \\
y(1) &= 0
\end{aligned}
$$

für alle $x \in [1, e)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Mit der Merkregel schreiben wir

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{e}^y}{x} \\ \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{e}^y}{x} \\ \rightsquigarrow \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y &= x^{-1}\,\mathrm{d}x \\ \rightsquigarrow \int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y &= \int x^{-1}\,\mathrm{d}x + c \\ \implies -\mathrm{e}^{-y} &= \log(x) + c \end{aligned}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Somit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = -\log(-\log(x) - c).$$

Um die Lösung des Anfangswertproblems zu finden, setzen wir

$$\begin{aligned} 0 = y(1) &= -\log(-\log(1) - c) = -\log(-c) \\ \iff c &= -1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$y(x) = -\log(1 - \log(x))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems, wobei $x \in (1, \mathrm{e})$, damit die Argumente in den Logarithmen immer positiv sind.

(b) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b)$ durch die folgenden Schritte in Zeilenstufenform um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1/2 \\ \mid \cdot (-1/3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-1/2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1/2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Somit ist die Lösung des Gleichungssystems gegeben durch $x = (-4, 1, 2)$. $\square$