

HÖHERE MATHEMATIK I FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

HAUPTKLAUSUR

AUFGABE 1 ((5+5) + 10 = 20 PUNKTE)

- a) Entscheiden Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n},$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/x}.$

- b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für welche

$$z^3 = 27i.$$

Geben Sie den Realteil sowie Imaginärteil dieser Lösungen an.

AUFGABE 2 ((4+2+4) + (6+4) = 20 PUNKTE)

- a) Wir untersuchen die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 + 1} (x - 2)^n.$$

- (i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.
(ii) Zeigen Sie, dass $\ln(n) < 2\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

- b) (i) Es sei

$$g(x) = \frac{\cosh(x)}{1 + \sinh(x)}, \quad x \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass das Minimum von g auf $[0, \infty)$ durch $1/\sqrt{2}$ gegeben ist.

HINWEIS: Es gilt $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (ii) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\ln(1 + \sinh(x)) \geq \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad x \in [0, \infty).$$

HINWEIS: Verwenden Sie den Mittelwertsatz und Aufgabenteil b) (i).

— bitte wenden —

AUFGABE 3 (5 + 10 + 5 = 20 PUNKTE)

a) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

b) Wir definieren $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$f(x) := \int_{\pi/2}^{x^2 + \pi/2} \frac{1}{\sin(t)} dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Weshalb existieren diese Integrale? Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 0)$.

c) Beweisen oder widerlegen Sie die Konvergenz des uneigentlichen Integrals,

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(t)}{t} dt.$$

AUFGABE 4 ((4+6) + (5+5) = 20 PUNKTE)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) & x \in [0, n\pi) \\ 0 & x \in [n\pi, \infty) \end{cases}.$$

(i) Gegen welche Funktion konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, \infty)$ punktweise?

(ii) Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

b) Es seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $g(x) = \exp(x)$ und $f(x) = \exp(-x)$.

(i) Es sei $V := \text{lin}\{f, g\}$ der von f, g aufgespannte Unterraum von $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass f, g eine Basis von V ist.

(ii) Wir untersuchen die lineare Abbildung,

$$\Phi : V \rightarrow V, \quad \Phi(h) = h + 2h'.$$

Wählen Sie eine Basis von V und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich dieser Basis.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für die Klausur:

- Erlaubte Hilfsmittel: Offizielle Formelsammlung, welche von uns ausgegeben wird.
- Die Einsicht zur Klausur ist am 27.04.23 geplant. Die Noten werden vorher bekannt gegeben.
- Sie erhalten eine Einladung zur Einsicht per E-mail.