Lösungsvorschlag zur HM 1 Physik
Frühjahr 2023

Notenschlüssel:

Note	Pkt.	Note	Pkt.	Note	Pkt.	Note	Pkt
5,0	0-19	3,3	30-33	2,3	44-47	1,3	58-63
4,0	20-25	3,0	34-39	2,0	48-53	1,0	64-80
3,7	26-29	2,7	40-43	1,7	54-57		

A1, a) i) Beh: der Grenzwert exestiert und die Folge konvergiert gegen 0.

Bew

$$0 \le \left| \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} \right| \le \frac{2\, 2^n}{3^n} = 2\left(\tfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{da } \tfrac{2}{3} < 1$$

damit folgt die Beh. nach dem Sandwich-Kriterium

ii) Der Grenzwert existiert. Wir schreiben den Ausdruck zunächst um. Es gilt

$$x^{2/x} = e^{\log(x^{2/x})} = e^{\frac{2\log(x)}{x}}$$

und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x}$ ist nach L'Hospital einfach zu bestimmen. L'Hospital ist anwendbar, da $\log(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ und $x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ und daher gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Da die exponentialfunktion stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{2/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2\log(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\log(x)}{x}} = e^0 = 1$$

b) Wir bestimmen die Lösungen der Gleichung

$$z^3 = 27i$$

Wir benutzen die eulersche Darstellung $z = |z| e^{i\varphi}$ $\varphi \in [0, 2\pi)$ sowie $i = e^{i\pi/2}$. Daher muss

$$|z|^3 e^{i(3\varphi \bmod 2\pi)} = 3^3 e^{i\pi/2}$$

Alle Lösungen müssen also $|z|^3 = 3^3 \Rightarrow |z| = 3$

sowie $3\varphi \bmod 2\pi = \frac{\pi}{2}$ erfüllen.

Es muss also für φ gelten $3\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{N}_0$

Für $k=0$ gilt $\varphi = \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$

Für $k=1$ gilt $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow \varphi = (\frac{1}{6} + \frac{2}{3})\pi = \frac{5}{6}\pi \in [0, 2\pi)$

Für $k=2$ gilt $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 4\pi \Rightarrow \varphi = (\frac{1}{6} + \frac{4}{3})\pi = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$

Damit haben wir 3 verschiedene Lösungen gefunden

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i$$

Es kann keine weiteren Lösungen geben, da es sich um ein Polynom vom grad 3 handelt.

Wir bestimmen noch Real und Imaginärteil der Lösungen

$$z_3 = -3i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_3) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z_3) = -3$$

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i3\sin(\tfrac{\pi}{6}) = 3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\tfrac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z_1) = \frac{3}{2}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow z_2 = 3\cos(\tfrac{5\pi}{6}) + i\,3\sin(\tfrac{5\pi}{6}) = 3\tfrac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\tfrac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_2) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z_1) = \frac{3}{2}$$

A2, a) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{1+n^2}(x-2)^n$

Wir bestimmen den Konvergenzradius

$$a_n := \frac{\ln(n)}{1+n^2}$$

Wir bestimmen den Grenzwert $\frac{(n+1)^2}{n^2}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{1+n^2}{1+(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)} + 1\right) \frac{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(\frac{1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^2})}$$

$$= \left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} + 1\right) \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + (1+\frac{1}{n})^2}$$

Wir folgern mit den üblichen Grenzwertsätzen und der

Stetigheit von $\ln(\cdot)$ in 1, dass

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad , \quad \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+(1+\frac{1}{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ und nach VL gilt also für den konvergenzradius: $R = 1$.

(ii) Wir zeigen $\ln(n) < 2\sqrt{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Wir substituiern $\sqrt{n} = t$

$$\Rightarrow \ln(t^2) < 2t \Leftrightarrow \cancel{2}\ln(t) < \cancel{2}t \Leftrightarrow \frac{\ln(t)}{t} < 1$$

Es gilt $\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)' = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln(t)}{t^2} \leq 0 \underset{t^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} 1 \leq \ln(t)$

Beachte $\ln(e) = 1$ und $\ln(\cdot)$ ist mon. wachsend also gilt $\ln(t) \geq 1 \Leftrightarrow t \geq e$ und damit ist $\frac{\ln(t)}{t}$ für $t \geq e$ monoton fallend und für $t < e$ monoton wachsend

D.h $\frac{\ln(t)}{t}$ nimmt sein maximum bei $t = e$ an. ($\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ siehe 1)

$$\left.\frac{\ln(t)}{t}\right|_{t=e} = \frac{1}{e} < 1 \quad \text{da} \quad e > 1.$$

Damit gilt $\frac{\ln(t)}{t} < 1 \quad \forall t > 0$ und damit gilt auch $\ln(n) \leq 2\sqrt{n} \quad \forall n > 0$ also insbesondere $n \in \mathbb{N}$ nach Rück-Substitution.

(iii) Nach i) gilt für den Konvergenzradius $R = 1$ und damit konv. die Potenzreihe $\forall x: |x-2| < 1$ absolut.

Für $|x-2| = 1$ also $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$ müssen wir die Reihen gesondert untersuchen.

Sei also $x = x_2 = 1$, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{1+n^2}(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\ln(n)}{1+n^2}}_{\geq 0} \qquad \text{wir definieren } a_n = \frac{\ln(n)}{1+n^2}$$

$$a_n = \frac{\ln(n)}{1+n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} \leq 2 \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} \leq 2 \frac{\sqrt{n}}{n^2}$$
$$= 2\, n^{\frac{1}{2}-2}$$
$$= 2\, n^{-3/2}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konvergiert nach VL da $3/2 > 1$ und damit konvergiert die ursprüngliche Reihe nach dem Majoranten-kriterium.

Wir untersuchen den Fall $x_1 = 1$, dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{1+n^2} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{1+n^2} (-1)^n$$

Die Reihe konvergiert, da wir eben schon gezeigt haben, dass sie sogar absolut konvergiert.

b) Wir bestimmen das Minimum von $g(x) = \frac{\cosh(x)}{1+\sinh(x)}$

$$g(x) = \frac{\cosh(x)}{1+\sinh(x)} = \frac{\sqrt{1+\sinh(x)^2}}{1+\sinh(x)}$$ wir substituiere $t = \sinh(x)$

$$u(t) := \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}$$ Beachte die substitution $\sinh(x) = t$ ist auf $[0,\infty)$ bijektiv also genügt es das Minimum von u auf $[0,\infty)$ zu bestimmen

$$u'(t) = \frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2t \,\frac{1}{1+t} - (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+t)^2}$$
$$= \frac{t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+t} - \frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^2} \geq 0 \qquad \Big| \cdot (1+t^2)^{\frac{1}{2}} (1+t)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad t(1+t) - (1+t^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad t + t^2 - 1 + t^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad t \geq 1$$

D.h u ist für $t > 1$ monoton wachsend und für $t < 1$ monoton fallend.

U nimmt sein Minimum also bei $t = 1$ an.

Es ist $u(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) Wir zeigen die Ungleichung $\ln(1+\sinh(x)) \geq \frac{x}{\sqrt{2}}$

Sei $f(x) = \ln(1+\sinh(x))$, dann ist $f(0) = \ln(1) = 0$
und damit

$$\frac{\ln(1+\sinh(x))}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Nach dem Mittelwertsatz ex. also ein $\xi \in [0,x)$
mit

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) = \frac{\cosh(\xi)}{1+\sinh(\xi)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+\sinh(x)) \geq \frac{x}{\sqrt{2}} \qquad x \geq 0$$

A3,

a) Es ist $\qquad \int f'g = [fg] - \int fg'$

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\,dt = [\ln(t)^2]_1^2 - \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\,dt$$ mittels Partielle Integration

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln(2)^2$$

b) Wir bestimmen das Taylorpolynom bis zur 2. Ordnung von

$$f(x) = \int_{\pi/2}^{x^2+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$$

$$T_2(f,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$f(0) = 0$ nach Definition und

f ist wohldefiniert (d.h. die Integrale ex.) da $\frac{1}{\sin(\cdot)}$ auf $[\frac{\pi}{2}, x^2+\frac{\pi}{2}]$ stetig ist.

Sei $G(\cdot)$ die Stammfkt. von $\frac{1}{\sin(\cdot)}$, dann gilt

$$f'(x) = \left(G(x^2+\tfrac{\pi}{2}) - G(\tfrac{\pi}{2}) \right)' = G'(x^2+\tfrac{\pi}{2})\, 2x$$
$$= \frac{2x}{\sin(x^2+\frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

und $$f''(x) = \left(\frac{2x}{\sin(x^2+\frac{\pi}{2})} \right)' = \frac{2}{\sin(x^2+\frac{\pi}{2})} - 4x \frac{\cos(x^2+\frac{\pi}{2})}{\sin(x^2+\frac{\pi}{2})^2}$$

$$\Rightarrow \quad f''(0) = \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2})} = 2$$

Es gilt also

$$T_2(f,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x^2$$

c) Es ist

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(t)}{t}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\arctan(t)}{t}\,dt$$
$$\geq \lim_{R\to\infty} \arctan(1) \int_1^R \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \lim_{R\to\infty} \arctan(1) \ln(R)$$

und damit divergiert das Integral nach dem Minoranten-Kriterium. Wir haben benutzt, dass $\arctan(\cdot)$ monoton wachsend ist. Das ist klar, denn

$$(\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2} \geq 0$$

A4 Es sei

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(\frac{x}{n^2}) & x\in[0,n\pi) \\ 0 & x\in[n\pi,\infty) \end{cases}$$

i) Die Funktionsfolge konvergiert punktweise gegen die konstante Null-Funktion, denn für festes $x\in[0,n\pi)$ gilt

$$0 \leq n\sin(\tfrac{x}{n^2}) \leq n\frac{x}{n^2} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Wir haben verwendet, dass $\sin(t) \leq t \quad \forall t > 0$

Das ist klar, denn $\frac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0} \underset{\xi \in [0,t]}{=} \cos(\xi) \leq 1$

(ii) Die Funktionsfolge konvergiert <u>nicht</u> gleichmäßig, denn für $x_n = n\frac{\pi}{2}$ gilt

$$n \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) = n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\pi/2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

denn $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0} = \cos(0) = 1$

und damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_\infty \geq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n} = \frac{\pi}{2}$

und damit kann die Konvergenz nicht glm. sein

<u>b)</u> f, g spannen V nach Definition auf, es bleibt zu zeigen, dass f, g linear unabhängig sind.

Es ist

$$a f(x) + b g(x) = 0 \iff a e^x + b e^{-x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\iff a e^{2x} = -b \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

also für $x = 0$ muss $a = -b$ und daher

$$a e^{2x} = a \quad \forall x \in \mathbb{R} \underset{a \neq 0}{\implies} e^{2x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

was für $x = 1$ offensichtlich ein Widerspruch ist und damit muss $a = b = 0$ gelten.

Damit sind aber f, g linear unabhängig und bilden damit eine Basis von V.

ii) Nach i) bildet f, g eine Basis von V. Wir wählen diese Basis $b_1 = f$ und $b_2 = g$, dann gilt

$$\Phi(b_1) = b_1 + 2b_1 = 3b_1$$
$$\Phi(b_2) = b_2 - 2b_2 = -b_2$$

Wir lesen die Darstellungsmatrix B ab. Es ist

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$