

**Modulprüfung**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**  
Wintersemester 2023/24  
14. März 2024

---

**Aufgabe 1 (6 + (7 + 7) = 20 Punkte):**

- (a) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt:  $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$ .
- (b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren:
- (i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - x^2 + 2x - 8}$ ,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right)$ .

---

**Aufgabe 2 (10 + 10 = 20 Punkte):**

- (a) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für welche die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 3\sqrt{n}} x^n$  konvergiert.
- (b) Es sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe mit  $a_n \geq 0$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m (1 + a_n)$$

existiert.

*Hinweis:* Sie können ohne Beweis  $1 + x \leq e^x$  (für  $x \in \mathbb{R}$ ) benutzen.

---

**Aufgabe 3 (6 + 8 + 6 = 20 Punkte):**

- (a) Berechnen Sie das Integral, sofern es existiert

$$\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = xe^{(-\frac{x^2}{n})} \cosh(x)$$

gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie folgenden Grenzwert, falls er existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 xe^{(-\frac{x^2}{n})} \cosh(x) dx.$$

- (c) Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx.$$

---

**Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte):**

- (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  des Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Viel Erfolg!**