 

# HÖHERE MATHEMATIK I FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

## HAUPTKLAUSUR

AUFGABE 1 ( (5+5) + (3+3+4) = 20 PUNKTE)

**a)** Beweisen Sie die folgenden Aussagen, oder geben Sie ein geeignetes Gegenbeispiel an und begründen Sie, weshalb das Beispiel geeignet ist.

(i) Jede positive nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

(ii) Jede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ über eine nicht negative Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist konvergent.

**b)** Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wobei $a_n := \dfrac{e^n}{n!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)$, wobei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2\ln(x)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} g_\alpha(x)$, wobei $g_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g_\alpha(x) = \dfrac{e^{\alpha x}}{x^{2025}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ fest.

---

LÖSUNGSHINWEISE:

**a)** (i) Ein Gegenbeispiel ist: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n = 2 + (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge hat zwei unterschiedliche Häufungswerte und ist daher divergent.

(ii) Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n = 0$ wenn $n$ ungerade und $a_n = 1/n$ wenn $n$ gerade. Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe ist divergent.

**b)** (i) Es handelt sich um eine Nullfolge, denn die Reihe über die Fogle konvergiert, da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!} = e^e < \infty.$$

Alternativ kann man direkt abschätzen. Es ist für $n \geq 3$

$$0 \leq \frac{e^n}{n!} = \frac{e^3}{3!}\frac{e^{n-3}}{\prod_{k=4}^{n} k} \leq \frac{e^3}{3!}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \to 0$$

für $n \to \infty$.

**— bitte wenden —**

(ii) Es ist $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$, denn nach der Regel von L'Hospital, die hier indirekt anwendbar ist gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} x^2 \ln(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{-x^3}{2x} = 0 .$$

(iii) Wir unterscheiden die Fälle $\alpha \leq 0$ und $\alpha > 0$. Für $\alpha \leq 0$ ist $0 < e^{\alpha x} \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit gilt (nach dem Sandwich-Kriterium) $\lim_{x\to\infty} g_\alpha(x) = 0$. Für $\alpha > 0$ und $x > 1$ gilt

$$x^{-2025} e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^{n-2025}}{n!} \geq \sum_{n=2026}^{\infty} \frac{\alpha^n x^{n-2025}}{n!} \geq x \sum_{n=2026}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}.$$

Wir haben verwendet das $x > 1$. Da $\sum_{n=2026}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ existiert und positiv divergiert die rechte Seite der obigen Ungleichung nach unendlich und damit auch die linke Seite.

---

**— bitte wenden —**

AUFGABE 2 ( (7+3) + (5+5) = 20 PUNKTE)

**a)** Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \ x = 0, \\ x^{-2}\sin^2(x) & , \ x \neq 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $g$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und geben sie die Ableitung $g'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ an.

(ii) Bestimmen Sie das Maximum von $g$ auf $\mathbb{R}$.

**b)** Wir untersuchen die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^{-n} x^n.$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

---

LÖSUNGSHINWEISE:

**a)** (i) Beachte, dass sowohl $\sin^2(x)$ als auch $x^2$ differenzierbar sind. Die Abbildung $g$ ist daher für $x \neq 0$ als Quotient differenzierbarer Funktionen mit nicht verschwindendem Nenner differenzierbar.

Um zu zeigen, dass $g$ in $x = 0$ differenzierbar ist, genügt es nachzuweisen, dass die Funktion $u(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ in $x = 0$ differenzierbar ist. Dann folgt aus der Kettenregel die Differenzierbarkeit von $g(x) = u(x)^2$.

Wir zeigen daher, dass $u(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ in $x = 0$ mit $u(0) = 1$ differenzierbar ist, indem wir die Konvergenz des folgenden Grenzwerts untersuchen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

Hier kann man entweder über die Reihenentwicklung des Sinus argumentieren oder L'Hospital anwenden, da sowohl Zähler als auch Nenner im Grenzfall gegen Null gehen. Durch zweimaliges Anwenden von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0.$$

Daraus folgt $u'(0) = 0$. Nach der Kettenregel gilt dann

$$g'(0) = (u^2(0))' = 2u(0)u'(0) = 0.$$

Nach der Produktregel gilt für $x \neq 0$

$$g'(x) = \left(x^{-2}\sin^2(x)\right)' = -2x^{-3}\sin^2(x) + x^{-2}2\sin(x)\cos(x) = 2x^{-3}\sin(x)\left(x\cos(x) - \sin(x)\right).$$

(ii) Wir zeigen, dass $g(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dies folgt unmittelbar aus der Ungleichung

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

**— bitte wenden —**

Da $|\sin(-x)| = |\sin(x)|$ für alle $x$ gilt, genügt es zu zeigen, dass

$$f(x) := \sin(x) \le x =: g(x)$$

für alle $x \ge 0$ gilt.

Für $x = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, da $f(0) = g(0) = 0$.

Um zu zeigen, dass $f(x) \le g(x)$ für alle $x > 0$ gilt, reicht es zu prüfen, dass $f'(x) < g'(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Es ist

$$f'(x) = \cos(x), \quad g'(x) = 1.$$

Da $\cos(x) < 1$ für alle $x > 0$ gilt, folgt daraus $\sin(x) \le x$ für alle $x \ge 0$ und damit auch

$$|\sin(x)| \le |x|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Da $g(0) = 1$ und $g(x) \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, nimmt $g$ bei $x = 0$ mit $g(0) = 1$ sein Maximum an.

**b)** (i) Für $x = 2$ divergiert die Reihe, da die Folge $\left(3 + (-1)^n\right)^{-n} 2^n$ keine Nullfolge ist. Dies erkennt man insbesondere durch Betrachtung der ungeraden Folgenglieder. Analog folgt die Divergenz der Reihe für $x = -2$.

Für $x < 2$ konvergiert die Reihe absolut, was durch Vergleich mit einer geometrischen Reihe gezeigt werden kann:

$$\left|\left(3 + (-1)^n\right)^{-n} x^n\right| = \left(\frac{x}{3 + (-1)^n}\right)^n \le \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Nach Definition beträgt der Konvergenzradius $R = 2$.

Alternativ kann der Konvergenzradius nach der Methode von Cauchy-Hadamard bestimmt werden:

$$R = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\right)^{-1}$$

wobei in unserem Fall

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(3 + (-1)^k\right)^{-1} = \begin{cases} 1/4, & k \text{ gerade} \\ 1/2, & k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Damit sind $1/2$ und $1/4$ die einzigen Häufungswerte der Folge $k \mapsto \sqrt[k]{|a_k|}$ (da gerade und ungerade natürliche Zahlen zusammen alle natürlichen Zahlen abdecken), und es folgt unmittelbar $R = 2$ nach der Definition des $\limsup$.

(ii) Für $x \in (-2, 2)$ konvergiert die Reihe absolut, da der Konvergenzradius $R = 2$ ist.

Für $x \notin [-2, 2]$ sowie an den Randpunkten $x \in \{-2, 2\}$ divergiert die Reihe, da die Folge $\left(3 + (-1)^n\right)^{-n} x^n$ keine Nullfolge ist.

**— bitte wenden —**

Für $|x| > 2$ ist dies offensichtlich. Zur Verdeutlichung betrachten wir noch einmal den Fall $x = 2$. Für ungerades $n$ gilt:

$$\left(3 + (-1)^n\right)^{-n} x^n = \left(\frac{2}{3 + (-1)^n}\right)^n = 1.$$

Analog ergibt sich für $x = -2$ und ungerades $n$:

$$\left(3 + (-1)^n\right)^{-n} x^n = -\left(\frac{-2}{3 + (-1)^n}\right)^n = -1.$$

---

**— bitte wenden —**

Aufgabe 3 ( 4 + 8 + 8 = 20 Punkte)

**a)** Beweisen oder widerlegen Sie die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**b)** Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\cos(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Weshalb existieren diese Integrale? Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,0)$.

**c)** Für alle $s,t \in \mathbb{R}$ sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ t & t \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $s$ und $t$ so, dass $\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ sowie von $\mathrm{Bild}(A)$.

---

LÖSUNGSHINWEISE:

**a)** Sei $R > 0$, dann gilt

$$\int_1^R \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^R \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln(t)^2\right]_1^R = \frac{\ln(R)^2}{2}.$$

Im Grenzfall $R \to \infty$ divergiert das uneigentliche Integral nach dem Minorantenkriterium.

**b)** Die Abbildung $\cos(t)/(1+t)$ ist auf dem kompakten Intervall $[0,x^2]$ stetig und damit Riemann Integrierbar. Es gilt $f(0) = 0$ und

$$f'(x) = \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}2x.$$

Daher ist $f'(0) = 0$. Die Abbildung $x \mapsto \cos(x^2)/(1+x^2)$ ist in $x = 0$ differenzierbar als Quotient differenzierbarer Funktionen wobei $1 + x^2 \neq 0$. Daher gilt nach der Kettenregel

$$f''(x) = \left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^2}\right)' 2x + 2\frac{\cos(x^2)}{1+x^2}$$

so, dass $f''(0) = 2$. Nach der Formel für das Taylorpolynom gilt dann sofort $T_2(f,0) = x^2$.

**c)** Es ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Damit der Kern nichttrivial ist muss rang$(A)$=1 gelten. Nach dem Gauß-Algorithmus bringen wir $A$ auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3t \\ 0 & 1-4s \end{pmatrix} \quad .$$

**— bitte wenden —**

Diese Matrix hat Rang 1 genau dann, wenn $t = 0$ und $s = 1/4$ gilt. Für $t = 0$ und $s = 1/4$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Kerns ist dann zum Beispiel durch $(4, -1)$ gegeben. Das Bild wird von den Spalten aufgespannt also ist $(4, 0, 1)^T$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

---

**— bitte wenden —**

Aufgabe 4 ((6+4) + (5+5) = 20 Punkte)

**a)** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben als

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}$$

(i) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(ii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf gleichmäßige Konvergenz.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

**b)** Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sinh(x), \quad h(x) = \cosh(x).$$

Es sei $V := \operatorname{lin}\{f, g, h\}$ der von $f, g$ und $h$ aufgespannte Unterraum von $C^2(\mathbb{R})$.

(i) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $f, g, h$ eine Basis von $V$ ist.
Hinweis: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Wählen Sie eine Basis von $V$ und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$$\Phi : V \to V, \quad \Phi(y) = y'' + y' + y$$

---

LÖSUNGSHINWEISE:

**a)** (i) Wir bestimmen zunächst den punktweisen Grenzwert. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $f_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$. Für $x \neq 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|} = \frac{x}{n^{-1} + |x|} \to \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Der Punktweise Grenzwert existiert demnach für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Grenzfunktion ist

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(ii) Beachte, dass $f_n$ stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$, da $1 + n|x| \neq 0$ und da die Betragsfunktion stetig ist. Die Grenzfunktion $f$ ist in $x = 0$ unstetig und damit kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

**b)** (i) Die Funktionen $f, g$ und $h$ können keine Basis von $V$ bilden, da diese linear Abhängig sind. Es gilt offensichtlich

$$h(x) + g(x) = \sinh(x) + \cosh(x) = e^x = f(x),$$

und damit ist $(h + g - f)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ was ein direkter Widerspruch zur linearen Unabhägigkeit ist.

**— bitte wenden —**

(ii) Eine Basis von $V$ ist zum Beispiel durch die beiden Funktion $g, h$ gegeben. Das $h, g$ tatsächlich linear unabhängig sind prüft man leicht nach. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$ah(x) + bg(x) = a\sinh(x) + b\cosh(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ muss dann $b = 0$ gelten und wenn $b = 0$ ist muss dann zum Biespiel für $x = 1$

$$a\sinh(1) = 0$$

gelten. Daher muss $a = b = 0$ gelten und $h, g$ sind linear unabhängig. Es ist dann $V = \mathrm{lin}(g, h)$ mit der Basis $g, h$. Wir setzen $g$ bzw. $h$ in $\Phi$ ein und drücken dies dann durch die Vektoren $g, h$ aus um die Darstellungsmatrix abzulesen. Es ist

$$\Phi(g) = 2g + h, \quad \Phi(h) = 2h + g$$

Die Darstellungsmatrix ist demnach

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Man kann natürlich auch ander Basen wählen wie zum Beispiel $h, f$ oder $g, f$. Dies führt auf leicht andere Darstellungsmatrizen.