2. Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_\beta(x) = \frac{\beta^2 x}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimme die Nullstellen und die Extremstellen von f_β.

b) Bestimme $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\beta(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f_\beta(x)$.

c) Skizziere f_1.

d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_\beta(x))^k$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Untersuche auf Konvergenz und bestimme, falls existent, die folgenden Limites

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x - \cos(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan(x)}{6+\cos(4x)}$ iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^9 - x^8}{\ell n(x)}$

b) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch die Rekursion $a_{n+1} = \lambda a_n$ mit Startwert $a_1 = 1$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Sei $f(x) = x^3 - 1$. Bestimme alle möglichen Limites $x^* \in \mathbb{R}$ der Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \,.$$

b) Definiere $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ mit $f(x) = x^3 - 1$. Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x,1)$ zweiten Grades bei einer Entwicklung von g um $x^* = 1$.

c) Betrachte die Iteration $h_{n+1} = T_2(1 + h_n, 1) - 1$ mit Startwert h_0. Für welche h_0 liegt Konvergenz vor. Bestimme dann $\lim\limits_{n\to\infty} h_n$.

– bitte wenden –

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Montag, den **13. Februar 2006**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.
Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **15. Februar 2006** von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1+x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

-1	0	$1/5$	1	$1/5!$	$5!$

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

2	0	$-1/2$	1	$1/6!$	$6!$

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

∞	$3!$	3	1	$1/3$	0

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\ m \in \mathbb{N}\,. \\ \frac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}\,. \\ \frac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\ m \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

∞	3	2	1	$1/2$	0

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} x^k\,.$$

Die Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$[0, \infty[$	$]-1, 1[$	$]-1, 1]$	$[-1, 1[$	$[-1, 1]$	$]-\infty, 0]$

ist.

Viel Erfolg!

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1 + x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

$5!$	1	-1	$1/5$	$1/5!$	0

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

$6!$	2	1	$1/6!$	0	$-1/2$

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

0	∞	$1/3$	1	3	$3!$

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \dfrac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \dfrac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\ m \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

0	∞	$1/2$	1	2	3

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\, x^k\ .$$

e Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$]-\infty, 0]$	$[0, \infty[$	$[-1, 1]$	$[-1, 1[$	$]-1, 1]$	$]-1, 1[$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1 + x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

$5!$	$1/5!$	1	$1/5$	0	-1

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

$6!$	$1/6!$	1	$-1/2$	0	2

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

0	$1/3$	1	3	$3!$	∞

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\, m \in \mathbb{N}\,. \\ \frac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\, m \in \mathbb{N}\,. \\ \frac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\, m \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

0	$1/2$	1	2	3	∞

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\, x^k\,.$$

Die Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$]-\infty, 0]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1[$	$]-1, 1]$	$]-1, 1[$	$[0, \infty[$

ist.

Viel Erfolg!

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1+x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

0	1/5!	1/5	1	−1	5!

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

−1/2	0	1/6!	1	2	6!

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

1/3	1	3	3!	∞	0

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \frac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \frac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\ m \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

1/2	1	2	3	∞	0

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} x^k\ .$$

Die Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$[-1,1]$	$[-1,1[$	$]-1,1]$	$]-1,1[$	$]-\infty,0]$	$[0,\infty[$

ist.

Viel Erfolg!