UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

WS 2008/09
31.01.2009

Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) **i)** **(2 Punkte)** Wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1\,.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sinh(x^2)} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{\sinh(h)} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\frac{\sinh(h)-\sinh(0)}{h}} = \frac{1}{\sinh'(0)} = \frac{1}{\cosh(0)} = 1\,.$$

Insgesamt erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sinh(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sinh(x^2)} = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

ii) **(3 Punkte)** Der Ausdruck

$$\lim_{x\to 1-} \ln(x)\,\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$". Die Ableitung von $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ ist in einer Umgebung von 1 ungleich Null. Es gilt

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{d}{dx}\,\ln(1-x)}{\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{(\ln(x))^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{x\,(\ln(x))^2}{1-x}\,.$$

Da die Ableitung von $x \mapsto 1-x$ in einer Umgebung von 1 nicht verschwindet, folgt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 1-} \frac{(\ln(x))^2}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{-1} = 0\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x\,(\ln(x))^2}{1-x} = 1 \cdot 0 = 0$$

und die Regel von de l'Hospital liefert für den zu untersuchenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 1-} \ln(x)\,\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{d}{dx}\,\ln(1-x)}{\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\ln(x)}} = 0\,.$$

iii) **(1 Punkt)** Wegen $\lim_{x\to 0} \sin(\cos x) = \sin(\cos 0) \neq 0$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(\cos x)} = \frac{0}{\sin(\cos 0)} = 0\,.$$

b) (4 Punkte) Ist für $n \in \mathbb{N}$

$$b_n := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \right)^n$$

gesetzt, so gilt

$$\sqrt[n]{\frac{b_n}{n^3}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \to \frac{1}{1^3} \cdot e^2 = e^2 \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$ beträgt also $R = e^{-2}$. Deshalb ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < e^{-2}$ konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > e^{-2}$ divergent. Zu untersuchen verbleibt der Fall $|x| = e^{-2}$, also $x = e^{-2}$ oder $x = -e^{-2}$:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $0 < \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \leqslant e^2$

$$0 < b_n \leqslant e^{2n}$$

und damit

$$0 < \left| b_n x^n \right| = b_n |x|^n \leqslant e^{2n} \, (e^{-2})^n = 1\,.$$

Demzufolge erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{b_n}{n^3} \, x^n \right| = \frac{1}{n^3} \left| b_n x^n \right| \leqslant \frac{1}{n^3}\,.$$

Aufgrund der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$ für $|x| = e^{-2}$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$ konvergiert genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leqslant e^{-2}$.

Aufgabe 2

a) i) (3 Punkte) Die durch $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 3e^{3x} + \frac{1}{1+x^2} > 0\,.$$

Also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen $f(x) > -\frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ sowie der Stetigkeit von f folgt aus dem Zwischenwertsatz: $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \infty)$. Damit besitzt die bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \infty)$ die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (-\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$.

ii) (2 Punkte) Wegen $f(0) = 1$ ist $f^{-1}(1) = 0$. Da $f'(0) = 4 \neq 0$ ist f^{-1} nach dem Satz über die Umkehrfunktion in $f(0) = 1$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}\,.$$

b) (5 Punkte) Um zu zeigen, dass

$$\left| \ln(\cos x) - \ln(\cos y) \right| \leqslant \sqrt{3}\, |x - y|$$

für alle $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$ gilt, betrachten wir die Funktion $f\colon [-\pi/3, \pi/3] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \ln(\cos t)$. Diese ist auf $[-\pi/3, \pi/3]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$. Da $\tan$ auf $[-\pi/3, \pi/3]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$\left| f'(t) \right| \leqslant \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\pi/3, \pi/3]\,.$$

Sind $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)\,(x - y)\,.$$

Es folgt

$$\left| f(x) - f(y) \right| = \left| f'(\xi) \right| |x - y| \leqslant \sqrt{3}\, |x - y|\,.$$

Aufgabe 3

a) **i)** **(2 Punkte)** Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2}\,dx &= \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \left(xe^{-x^2}\right) dx = \left[x^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2x \cdot \left(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right) dx \\ &= -\tfrac{2}{2}e^{-2} + \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\,dx = -e^{-2} + \left[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= -e^{-2} - \tfrac{1}{2}e^{-2} + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2}e^{-2} + \tfrac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

ii) **(2 Punkte)** Da eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ durch $x \mapsto \ln(\cosh(x))$ gegeben ist, gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,dx &= \Big[\ln(\cosh(x))\Big]_{-2\pi}^{2\pi} = \ln(\cosh(2\pi)) - \ln(\cosh(-2\pi)) \\ &= \ln(\cosh(2\pi)) - \ln(\cosh(2\pi)) = 0\,.\end{aligned}$$

b) **(2 Punkte)** Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Substitution $y = 1 - x$, $dy = (-1)\,dx$ führt auf

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx = \int_{1-0}^{1-1} (1-y)^n y^m\,(-1)\,dy = \int_0^1 y^m (1-y)^n\,dy\,.$$

c) **(4 Punkte)** Zu zeigen ist, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$$

konvergent ist und dass sein Wert in $[0, 2]$ liegt.

Zunächst beachten wir $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0+$. Daraus ergibt sich $\frac{\sin^2(x)}{x^2} \to 1$ für $x \to 0+$, weshalb das Integral bei 0 nicht uneigentlich ist. Für alle $x \in (0, 1]$ gilt wegen $|\sin(x)| \leqslant x$

$$0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant 1\,,$$

woraus

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 1\,dx = 1$$

folgt. Da $0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ für alle $x \geqslant 1$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1$$

konvergent ist, konvergiert $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium und es gilt

$$0 \leqslant \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1\,.$$

Zusammen erhalten wir, dass $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert und dass für den Wert gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx}_{\in[0,1]} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{\in[0,1]} \in [0, 2]\,.$$

Aufgabe 4

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := e^{-n\sin(x)}\,.$$

i) **(2 Punkte)** Für jedes $x \in (0,1]$ gilt wegen $\sin x > 0$

$$f_n(x) = e^{-n\sin x} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(0) = e^{n\sin 0} = e^0 = 1\,.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \in (0,1]. \end{cases}$$

ii) **(2 Punkte)** Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ gegen die in 0 unstetige Funktion f. Alle Funktionen f_n sind (als Komposition stetiger Funktionen) auf $[0,1]$ stetig. Würde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f konvergieren, so wäre f auf $[0,1]$ stetig. Da f aber unstetig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f.

iii) **(3 Punkte)** Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Da $\sin$ auf $[0,1]$ streng monoton wachsend ist, gilt $0 < \sin\varepsilon \leqslant \sin x$ für alle $x \in [\varepsilon, 1]$. Deshalb erhält man aufgrund der Monotonie der Exponentialfunktion für jedes $x \in [\varepsilon,1]$

$$\left|f_n(x)\right| = e^{-n\sin x} \leqslant e^{-n\sin\varepsilon} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[\varepsilon,1]$ gegen die Nullfunktion.

b) **(3 Punkte)** Seien $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Die Funktion g sei beschränkt und f sei differenzierbar mit $f'(0) = f(0) = 0$.

Da g beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ mit

$$|g(x)| \leqslant K \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

Wegen $f(0) = 0$ gilt für jedes $h \in [-1,1] \setminus \{0\}$

$$\frac{(f\cdot g)(h) - (f\cdot g)(0)}{h} = \frac{f(h)g(h) - f(0)g(0)}{h} = \frac{f(h)g(h)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h}\, g(h)\,.$$

Demzufolge ist

$$\left|\frac{(f\cdot g)(h) - (f\cdot g)(0)}{h}\right| = \left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \left|g(h)\right| \leqslant \underbrace{\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|}_{\to |f'(0)|=0 \ (h\to 0)} K \to 0 \quad \text{für } h \to 0\,,$$

d.h. $\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(h)-(f\cdot g)(0)}{h} = 0$. Also ist $f\cdot g$ in 0 differenzierbar mit $(f\cdot g)'(0) = 0$.