Musterlösungen

A1) $f(x) = \big|\, |x^2-2| + |1-x^2| \,\big|$

(a) Es ist $\quad |x^2-2| = \begin{cases} x^2-2 & \text{für } |x| \geq \sqrt{2} \\ 2-x^2 & \text{für } |x| < \sqrt{2} \end{cases}$

$$|1-x^2| = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } |x| > 1 \\ 1-x^2 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \wedge x \in [\sqrt{2}, \infty)$

$$|x^2-2| + |1-x^2| = x^2-2+x^2-1 = 2x^2-3$$

$$\Rightarrow f(x) = |2x^2-3| = 2x^2-3$$

2. Fall: $x \in (-\sqrt{2}, 1) \wedge x \in (1, \sqrt{2})$

$$|x^2-2| + |1-x^2| = 2-x^2+x^2-1 = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = |1| = 1$$

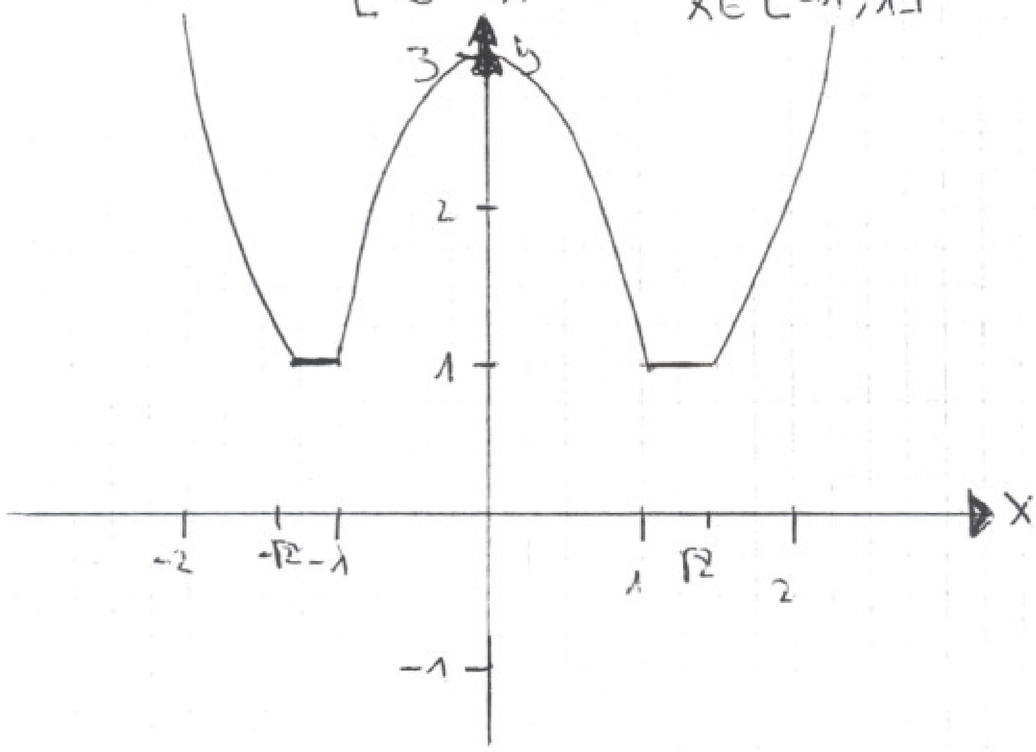
3. Fall $x \in [-1, 1]$

$$|x^2-2| + |1-x^2| = 2-x^2+1-x^2 = 3-2x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = |3-2x^2| = 3-2x^2$$

Also: $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & \\ 1 & \text{für} \\ 3-2x^2 & \end{cases} \begin{array}{l} x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \wedge [\sqrt{2}, \infty) \\ x \in (-\sqrt{2}, -1) \wedge (1, \sqrt{2}) \\ x \in [-1, 1] \end{array}$

b)



(c) • $y=a$ hat keine Schnittpunkte mit $f(x)$ für $a \in (-\infty, 1)$

• $y=a$ hat vier Schnittpunkte mit $f(x)$ für $a \in [1, 3)$

• $y=a$ hat drei Schnittpunkte mit $f(x)$ für $a = 3$

• $y=a$ hat zwei Schnittpunkte mit $f(x)$ für $a \in (3, \infty)$

(d) z.B $x = b$, $b \in \mathbb{R}$

$y = \pm\sqrt{2}\, x$

andere Alternativen möglich

1. Übklausur HM I WS 2006/07 — Lösungsvorschlag

Aufgabe 2

Vor: $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$ — Vor für a), b), c).

a) Vor: $x > y$ — Beh: $x^n > y^n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Bew: Ist $y = 0$, so ist nichts zu beweisen.
Also sei $x > y > 0$.

Induktion: Anfang: $n = 2$: $x > y \Longleftrightarrow x^2 > y^2$ (Vorlesung)

Induktionsschluss $n \to n+1$:

Ind Vor: $x > y$ und $x^n > y^n$ — Beh: $x^{n+1} > y^{n+1}$

Beweis:
$$\left.\begin{array}{l} x^n > y^n \xrightarrow{y>0} x^n y > y^{n+1} \\ x > y \xrightarrow{x^n > 0} x^{n+1} > x^n y \end{array}\right\} x^{n+1} > y^{n+1}$$

b) Die zu beweisende Ungleichung $xy^n + x^n y < x^{n+1} + y^{n+1}$ ist äquivalent zu
$$x^{n+1} - x^n y + y^{n+1} - xy^n = x^n(x-y) + y^n(y-x)$$
$$= (x^n - y^n)(x-y) > 0$$
und das ist nach a) und wegen $x \neq y$ richtig

c) Beweis mit Induktion:

Ind Anfang: $n = 2$: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \underset{\uparrow \text{ Vorlesung}}{\overset{\text{GAM-Ungleichung}}{<}} x^2 + y^2 + x^2 + y^2$

Ind Schluss: $n \to n+1$: Ind Vor: Für ein $n \geq 2$ gilt $(x+y)^n < 2^{n-1}(x^n + y^n)$

Ind Beh: $(x+y)^{n+1} < 2^n(x^n + y^n)$

Ind Bew: (beachte, dass nach Vor $x+y > 0$ gilt)
$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \underset{\text{Ind Vor}}{<} 2^{n-1}(x+y)(x^n + y^n)$$
$$= 2^{n-1}(x^{n+1} + y^{n+1} + xy^n + yx^n)$$
$$\overset{b)}{<} 2^{n-1}(x^{n+1} + y^{n+1} + x^{n+1} + y^{n+1}) = 2^n(x^{n+1} + y^{n+1})$$

(173) $z^3+3z^2+3z=-1+i$

1. Lösungsweg: $z^3+3z^2+3z+1=i$

$\Leftrightarrow \quad (z+1)^3=i$

$\Leftrightarrow \quad w^3=i$ mit $w=z+1$

Es ist $|i|=1$, $\arg(i)=\frac{\pi}{2}=\varphi$

$\Rightarrow \quad w_k=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$

$w_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$

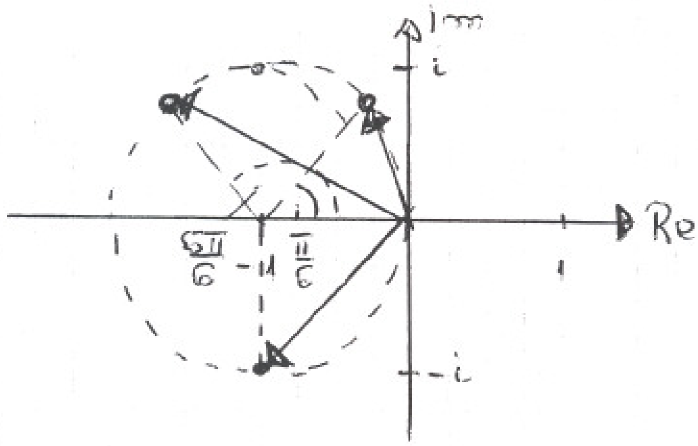
$w_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

$w_2=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

$\Rightarrow \quad z_0=-1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

$z_1=-1+\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

$z_2=-1+\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-1-i$



2. Lösungsweg: $z^3 + 3z^2 + 3z = -1+i$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - i = 0$$

Hinweis $\Rightarrow z_0 = \lambda(1+i) \Rightarrow z_0^2 = \lambda^2(1+i)^2 = 2i\lambda^2 \Rightarrow z_0^3 = 2i\lambda^3(1+i) = 2\lambda^3(i-1)$

$\Rightarrow 2\lambda^3(i-1) + 6i\lambda^2 + 3(1+i)\lambda + 1 - i = 0$

$\Rightarrow$ Realteil: $-2\lambda^3 + 3\lambda + 1 = 0 \quad (1)$

Imaginärteil: $2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad (2)$

$\left.\right\}$ (1)+(2) $\quad 6\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -1$

Probe: $\lambda = 0$: $z_0 = 0 \Rightarrow 0 = -1+i$ ↯

$\lambda = -1$: $z_0 = -1-i \Rightarrow z_0^2 = 2i \Rightarrow z_0^3 = 2i(-1-i) = 2(1-i)$

$\Rightarrow z_0^3 + 3z_0^2 + 3z_0 = 2(1-i) + 6i - 3(1+i) = -1+i$ ✓

Also $z_0 = -(1+i)$ ist Nullstelle.

Jetzt Polynomdivision: $(z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - i) : (z + 1 + i) = z^2 + (2-i)z - i$

$$\begin{array}{l} -(z^3 + z^2 + iz^2) \\ \hline (2-i)z^2 + 3z + 1 - i \\ -((2-i)z^2 + 3z + iz) \\ \hline -iz + 1 - i \\ -(-iz - i + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

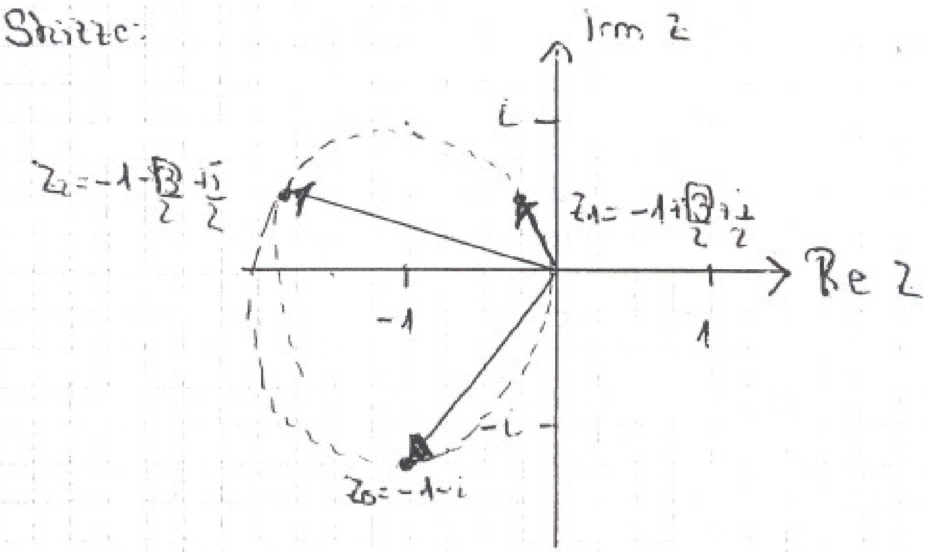
Jetzt: $z^2 + (2-i)z - i = 0 \Rightarrow z_{1/2} = -\frac{(2-i)}{2} \pm \sqrt{\frac{(2-i)^2}{4} + i}$

$$= -\frac{(2-i)}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

Also: $z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $\quad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

Skizze:



1. Ü Klausur HMI WS 2006/07 Lösungsvorschlag

Aufgabe 4

a) $g: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+t\\3+t\\7-t\end{pmatrix}, \; t\in\mathbb{R}$

b) $g \cap E_1: \quad (1+t) + 2(3+t) + 7 - t = 24 \rightarrow t = 5$

also: $g \cap E_1 = \{S_1\}, \; \vec{s}_1 = \begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}$ (Ortsvektor von S_1)

$g \cap E_2$: Analog: $(1+t) - (3+t) + (7-t) = 5 \rightarrow t = 0$

$\rightarrow g \cap E_2 = \{P_1\}, \; \vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}$

c) Subtrahiere die Gleichungen für E_1 und E_2: $y = \frac{19}{3}$

Aus E_2 folgt: $x + z = 5 + \frac{19}{3} = \frac{34}{3}$

$\rightarrow \quad z = -x + \frac{34}{3}, \; y = \frac{19}{3}$ (Gerade parallel zur (x,z)-Ebene)

Parameterdarstellung dieser Geraden: $\vec{x}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}34\\19\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

d) $\| \vec{s}_1 - \vec{p}_1 \| = \left\| \begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix} \right\| = 5\sqrt{3}$

e) Normale für E_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, für E_2: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad E_1 \perp E_2$: Winkel $\frac{\pi}{2}$.

f) Eine Ebene orthogonal zu E_1 und E_2 hat die Normalenrichtung $\vec{n} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ Alle Ebenen orthogonal zu E_1 und E_2 haben die Darstellung $x - z = \text{const}$