

**2. Übungsklausur**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen**  
**Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Die Folge  $(a_n)$  ist durch

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{a_n - 1}{a_n - 4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gegeben.

- a) Zeigen Sie:  $1 < a_n \leq 2$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- b) Begründen Sie, dass die Folge  $(a_n)$  konvergiert.
- c) Berechnen Sie den Grenzwert.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

- a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right) \frac{x^k}{k}.$$

- b) Untersuchen Sie die beiden Reihen

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}} \quad \text{und} \quad 2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$$

auf Konvergenz. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es ist für  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f_m(x) = \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0, \text{ gegeben.}$$

a) Lässt sich  $f_m$  stetig nach  $x = 0$  fortsetzen?

(Es ist zu untersuchen, ob  $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x)$  existiert.)

b) Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0^{(j)}(x)$  für  $j = 1, 2, 3$ .

c) Es sei  $g(x) := f_0(x)$ ,  $x > 0$ .

Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)$ .

Berechnen Sie diejenigen  $x$ , in denen für  $g$  Wendepunkte vorliegen.

Skizzieren Sie den Graphen von  $g$ .

Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}.$$

a) Bestimmen Sie Zahlen  $a_1, a_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2}$$

gilt.

b) Entwickeln Sie  $f(x)$  in eine Potenzreihe um  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .

c) Geben Sie den Konvergenzradius an.

**Viel Erfolg!**

### Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **13. Februar 2007**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **14. Februar 2007** von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.