

**1. Übungsklausur**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen**  
**Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

a) Anton, Bert und Charlie sollen Geschirr spülen. Es gelten folgende Regeln:

- (1) Mindestens einer muss Geschirr spülen.
- (2) Wenn Anton Geschirr spült, dann auch Charlie.
- (3) Wenn Bert Geschirr spült, dann auch Charlie.
- (4) Wenn Charlie Geschirr spült, dann spült weder Anton noch Bert Geschirr.

$A, B$  und  $C$  seien die Aussagen, dass Anton, Bert bzw. Charlie Geschirr spült. Folgern Sie formal, wer Geschirr spült. Sie haben dazu zwei Möglichkeiten:

Entweder Sie erstellen eine Wahrheitstabelle; in diesem Fall notieren Sie bei jedem Eintrag die Nummer der Aussage, die Sie verwendet haben.

Oder Sie formen (1) bis (4) in formale logische Aussagen um und schliessen daraus die Wahrheitswerte der Aussagen  $A, B$  und  $C$ .

b) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_1 := 3, \quad a_{n+1} = (a_n - 1)^2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $a_n \geq 3$ .
- (2) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $a_n \geq 2 + n$ .

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

a) Bestimmen Sie die  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $|5 - |x|| \leq 4$  gilt.

b) Bestimmen Sie die  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $|2 - |1 - |x||| < 1$  gilt.

Skizzieren Sie die Lösungsmengen auf der Zahlengeraden.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Es sind  $z = \sqrt{5}(1+i)$  und  $w = 3+i$  gegeben. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von  $z^{16}$  und  $\frac{1}{w}$ .

b) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$ , für die  $z^2 = \bar{z}$  gilt.

c) Es sind die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{C}$  gegeben:

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\},$$

$$D = \{z \in B : \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\},$$

$$P = \{z \in B : \operatorname{Im}(z) = (\operatorname{Re}(z))^2\}$$

1) Skizzieren Sie  $B, D, P$  in einer Skizze.

2) Skizzieren Sie in einer weiteren Skizze die Mengen

$$W = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in D\} \quad \text{und} \quad Q = \{z^2 \in \mathbb{C} : z \in D\}.$$

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})$

c)  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \geq 2}} \sqrt[n]{\sqrt{n-1}}$

Begründen Sie, was Sie machen.

**Viel Erfolg!**

### Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den **19. Dezember 2007**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **20. Dezember 2007** von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 12 möglich.