2. Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x-4)^n$$

konvergiert. Skizzieren Sie diese x auf der x–Achse.

b) Entwickeln Sie

$$f(z) = \frac{6}{1+z}$$

in eine Potenzreihe um $z_0 = 1$. Geben Sie den Konvergenzradius und alle $z \in \mathbb{C}$ an, in denen die Reihe konvergiert.

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{5k+1}}{(4+(-1)^k)^{3k}} .$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) := -x^5 + 4x^2 + \sin x$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$f(x) \to +\infty \text{ für } x \to -\infty \text{ und } f(x) \to -\infty \text{ für } x \to +\infty .$$

Zeigen Sie weiter, dass f surjektiv ist.

b) Gegeben seien folgende Funktionenfolgen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > n \\ 0 & \text{für } x \leq n , \end{cases}$$

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) := |\sin(x)|^n,$$

$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cos(kx) .$$

Zeigen Sie, dass (f_n), (g_n) und (h_n) punktweise konvergieren. Die Grenzfunktionen nennen wir f, g und h.
Untersuchen Sie (f_n), (g_n) und (h_n) auf gleichmäßige Konvergenz. Stellen Sie fest, welche der Grenzfunktionen f, g und h stetig sind.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ gilt: $|\sin(x)| \leq x$.

b) Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} x^a \sin^2(x^{-a}) & \text{für } x > 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

Für welche Werte von a ist g stetig?

Hinweis: Sie dürfen Aufgabenteil a) benutzen, auch wenn Sie diesen nicht bewiesen haben.

c) Sie sind Handelsreisender und befinden sich zur Zeit in Dorf D. Es gibt dort die zwei Handelswaren A und B zu kaufen. Von jeder Ware können Sie beliebig viel einkaufen. Der Preis von Ware A ist jedoch von der Einkaufsmenge abhängig. x Tonnen von Ware A kosten nämlich $5x + x^2$ Taler. y Tonnen von Ware B kosten $7y$ Taler.
Ihre Kamelflotte kann maximal 30 Tonnen nach Stadt S transportieren. Dort können Sie alle Ihre Ware verkaufen und erhalten für x Tonnen von Ware A den Verkaufspreis $17x$ Taler, für y Tonnen von Ware B erhalten Sie $11y$ Taler.

Wie wählen Sie x und y, um den maximalen Gewinn zu erzielen?

(Anmerkung: Den Preis in Dorf D für Ware A können Sie nicht drücken, indem Sie öfters kleine Mengen einkaufen.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Für $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $(x \neq -1)$ berechne man

$$f'(f(x)),\; f(f'(x)) \;\text{ und }\; (f \circ f)'(x)\,.$$

b) Gegeben sind differenzierbare Funktionen p, g, h mit $p(x) = g(x + g(x))$ und $h(x + 3) = g(x^2)$. Drücken Sie $p'(x)$ und $h'(x)$ aus durch Ausdrücke in x, g und g'.

c) Berechnen Sie

$$\int_0^x \sqrt{\sqrt{t} + 1}\, dt \qquad (x > 0)\,.$$

Substituieren Sie zunächst geeignet. Verwenden Sie dann partielle Integration.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **12. Februar 2008**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **14. Februar 2008** von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 12 möglich.