

Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{\sinh(x^2)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln(x) \ln(1-x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(\cos x)}$

- b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$b_n := \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right)^n.$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$$

und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die diese Reihe konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- a) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$.
- i) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, indem Sie begründen, dass f injektiv ist, und das Bild $f(\mathbb{R})$ von f angeben.
- ii) Bestimmen Sie $f^{-1}(1)$ und berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.
- b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$ gilt

$$|\ln(\cos x) - \ln(\cos y)| \leq \sqrt{3} |x - y|.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$

ii) $\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx$

b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx .$$

c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

konvergent ist und dass sein Wert in $[0, 2]$ liegt.

Hinweis: Für jedes $x \in [0, 1]$ gilt $|\sin(x)| \leq x$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := e^{-n \sin(x)} .$$

- i) Bestimmen Sie die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gegen die die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.
- ii) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig konvergent ist.
- iii) Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[\varepsilon, 1]$.

b) Seien $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion g sei beschränkt und f sei differenzierbar mit $f'(0) = f(0) = 0$.

Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie $(f \cdot g)'(0)$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **10.02.2009**, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **12.02.2009**, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Gebäude 20.30) möglich.