Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2010/11
29.01.2011

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sei definiert durch

$$a_0 := 1+i, \qquad a_n := (a_{n-1})^2 \cdot (1-i) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ gilt:

$$a_n = 2^{2^n-1}(1+i)\,.$$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Berechnen Sie diese gegebenenfalls:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3+2-\sqrt{n^6+5n^3}\,.$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ und $b \in [0,\infty)$ ist die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} ae^x & \text{falls } x<0 \\ 1 & \text{falls } x=0 \\ \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}+b}-\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} & \text{falls } x>0 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$?

b) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(x-1)^n, \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe.

ii) Welche Funktion wird durch diese Potenzreihe für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1|<R$ dargestellt?

Hinweis: Mittels $(x-1)^n = (x-1)^k(x-1)^{n-k}$ lässt sich die Reihe als ein Cauchyprodukt auffassen.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2\big(\sin(\frac{1}{x}) + \frac{3}{x}\big) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie, in welchen Stellen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie dort die Ableitung f'.

b) Zeigen Sie, dass $f'(x) = f'(-x)$ für alle x, für die der Ausdruck definiert ist, gilt.

c) Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Ableitung f' stetig ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existieren.

e) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

f) Zeigen Sie, dass die Ableitung f' keine Nullstellen besitzt.
Hinweis: Es ist evtl. hilfreich, die Fälle $|x| < 1$ und $|x| \geq 1$ getrennt zu untersuchen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{5k}}{(4 + (-1)^k)^{3k}} .$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

gegeben.

Berechnen Sie die Grenzfunktion f, gegen die die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ punktweise konvergiert.

Untersuchen Sie, ob die Konvergenz $f_n \to f \quad (n \to \infty)$ auf

i) $[0, \infty)$ **ii)** $[1, \infty)$

gleichmäßig ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 08.02.2011, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 12.02.2011, von 13.15 Uhr bis 13.30 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianzgebäude 05.20) möglich.