

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1

a) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion:

I.A. ($n = 0$): Es gilt $a_0 = 1 + i = 2^{2^0-1}(1 + i)$.

I.S.: Für ein festes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gelte $a_n = 2^{2^n-1}(1 + i)$ (I.V.). Dann folgt

$$a_{n+1} = (a_n)^2 \cdot (1 - i) \stackrel{\text{I.V.}}{=} 2^{2^n-1} \cdot 2^{2^n-1} \cdot (1 + i) \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 - i)}_{=2} =$$

$$2^{2^n-1+2^n-1+1}(1 + i) = 2^{2^{n+1}-1}(1 + i) = 2^{2^{n+1}-1}(1 + i);$$

die Induktionsbehauptung trifft dann also auch für $n + 1$ zu.

Damit ist $a_n = 2^{2^n-1}(1 + i)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bewiesen.

b)

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

denn: $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} e = 1 \quad (n \rightarrow \infty)$

mit G.N. A2a), Def von e, Satz über Rechnen mit Grenzwerten

oder so: $1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$ und $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Bernoulli Ungleichung

ii) $\frac{n^3 + 2 - \sqrt{n^6 + 5n^3}}{n^3 + 2 + \sqrt{n^6 + 5n^3}} = \frac{(n^3 + 2)^2 - (n^6 + 5n^3)}{n^3 + 2 + \sqrt{n^6 + 5n^3}}$

$$= \frac{-1 + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^3} + \sqrt{1 + \frac{5}{n^3}}} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Aufgabe 2

- a) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen (unabhängig von a, b) stetig.

Im Punkt 0 ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

gilt.

Aus der Definition erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^x = ae^0 = a,$$

$$f(0) = 1 \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + b} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x} + b} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x} + b} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x} + b} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{\sqrt{1 + xb} + \sqrt{1}} = \frac{b}{1 + 1} = \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

f ist im Punkt 0 also genau dann stetig, wenn $a = 1 = \frac{b}{2}$ (also genau dann, wenn $a = 1$ und $b = 2$ ist) gilt.

Fazit: f ist auf \mathbb{R} genau dann stetig, wenn $a = 1$ und $b = 2$ gilt.

- b) i) Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichnen wir den entsprechenden Koeffizienten der Potenzreihe mit $a_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

$$\text{Es gilt } 1 = \frac{1}{0!} \leq \underbrace{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{=a_n} \leq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1)\text{-mal}} = n + 1 \leq 2n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wegen $\sqrt[n]{1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ und $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 1 = 1$ folgt mit dem Sandwich-Theorem $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Aus dem Wurzelkriterium folgt daher, daß der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$ ist.

- ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 1| < R$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x-1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x-1)^k (x-1)^{n-k} = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n \right) = \\ &= \exp(x-1) \cdot \frac{1}{1 - (x-1)} = \frac{e^{x-1}}{2-x}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Exponential- und geometrische Reihe die Konvergenzradien ∞ bzw. 1 haben und damit beide Faktoren des Cauchy-Produkts wegen $|x - 1| < R$ absolut konvergente Reihen sind.

Aufgabe 3

- a) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nach der Produkt- und der Kettenregel

$$f'(x) = 2x \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{x} \right) + x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{-3}{x^2} \right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 6 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 3 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = 0 + 3 = 3,$$

weil $|x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ für alle $x \neq 0$ ist. Damit ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = 3$.

Fazit: f ist auf \mathbb{R} differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 3 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

- b) Wie in a) gesehen, ist der Ausdruck für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und es gilt

$$f'(-x) = \begin{cases} 3 + 2(-x) \sin\left(\frac{1}{-x}\right) - \cos\left(\frac{1}{-x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 3 & \text{falls } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 3 & \text{falls } x = 0 \end{cases} = f'(x).$$

- c) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f' als Komposition stetiger Funktionen stetig.

In 0 ist f' nicht stetig, denn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ existiert nicht: Wegen $|x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} 3 + 2x \sin(\frac{1}{x}) = 3$. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ existiert also genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ existiert. Der letztgenannte Grenzwert existiert nicht, was man mittels der Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\frac{1}{\pi n})_{n \in \mathbb{N}}$ und der Divergenz von $(\cos \frac{1}{x_n})_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ einsieht.

Fazit: f' ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in 0 jedoch nicht.

- d) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3x = \infty,$$

denn $\sin(\frac{1}{x}) > 0$ für alle $x > \frac{1}{\pi}$.

Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3x = -\infty,$$

denn $\sin(\frac{1}{x}) < 0$ für alle $x < -\frac{1}{\pi}$.

- e) Da f nach a) auf \mathbb{R} differenzierbar ist, ist f auf \mathbb{R} erst recht stetig. Aus dem Zwischenwertsatz in Kombination mit d) erhalten wir somit $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Also ist f surjektiv.

- f) Nach a) gilt $f'(0) = 3 \neq 0$. Wegen b) genügt es daher zu zeigen, dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x > 0$ ist. Sei also $x > 0$.

Falls $x < 1$ gilt $|2x \sin(\frac{1}{x})| < 2$. Damit erhalten wir in diesem Fall $f'(x) = 3 + 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \geq 3 - |2x \sin(\frac{1}{x})| - |\cos(\frac{1}{x})| > 3 - 2 - 1 = 0$.

Falls $x \geq 1$ gilt $\frac{1}{x} \leq 1$ und damit $\sin(\frac{1}{x}) > 0$. Damit erhalten wir in diesem Fall $f'(x) = 3 + 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \geq 3 - |\cos(\frac{1}{x})| > 3 - 1 > 0$.

Also gilt in jedem Fall $f'(x) > 0$, also insbesondere $f'(x) \neq 0$.

Aufgabe 4

a) Für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gilt für den Konvergenzradius R :

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}. \quad \text{Bei der vorgelegten Reihe}$$

hat man: $a_k = 0$ für $k \neq 5n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$a_{5n} = \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{3n}}$$

$$\text{Es ist } \sqrt[5n]{|a_{5n}|} = \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{3/5}} = \begin{cases} \frac{1}{5^{3/5}} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3^{3/5}} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{3^{3/5}} \Rightarrow \underline{R = 3^{3/5} = \sqrt[5]{27}}$$

b) Man hat $f_n(0) = 0 \quad n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Für } x > 0 \text{ gilt } f_n(x) = \frac{\frac{1}{nx}}{1 + \frac{1}{n^2 x^2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Die Grenzfunktion f ist $f = 0$.

zu i) Für $x > 0$: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \|f_n\|_{\infty} \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}. \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $x > 0$ liegt für $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) keine gleichmäßige Konvergenz vor.

zu ii) Für $x \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $\frac{1}{x} \leq 1$

$$0 < f_n(x) < \frac{nx}{n^2 x^2} \leq \frac{1}{n}. \quad \text{Wegen } \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

unabhängig von x gilt: $\underline{f_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)}$

gleichmäßig für $x \geq 1$.