Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

WS 2011/12
28.01.2012

Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - 2xe^x}{x^3}$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2 \arcsin x)^{1/x}$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(1 + 4|x|)^{k-1}}$$

konvergiert, und berechnen Sie für diese x den Wert der Reihe.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} (\sin x)^2 \left(\sin \frac{1}{x^2}\right)^4 & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

i) Untersuchen Sie, in welchen Stellen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie dort die Ableitung f'.

ii) Ist f stetig? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x, y \in [-1, 1]$ gilt

$$\left|3^x - 3^y\right| \leqslant \log(27)\,|x - y|\,.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |\sinh(x+1)|\, dx$

ii) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x \cos x}{1+(\sin x)^2}\, dx$

iii) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{4\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\, dx$

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^x f(t)(x-t)\, dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\, du \right) dt.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin(\pi n x) & , 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leqslant 2. \end{cases}$$

i) Bestimmen Sie $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in [0,2]$.

ii) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \frac{nx^2}{1+nx}.$$

i) Bestimmen Sie die Funktion $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, gegen welche die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

ii) Bestimmen Sie $\sup\limits_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)|$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

iii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **07.02.2012**, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianz-Gebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **09.02.2012**, von 13.15 Uhr bis 13.30 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianz-Gebäude) möglich.