Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

WS 2011/12
28.01.2012

Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) **i)** **(2 Punkte)** Mit Hilfe der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion erhält man für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{2x} - 1 - 2xe^x}{x^3} \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots\right) - 1 - 2x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots - x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \dots\right) \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

ii) **(3 Punkte)** Da $\lim_{x\to 0} \arcsin x = 0$ ist, und log in 1 differenzierbar ist mit $\log'(1) = 1$, gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + 2\arcsin x) - \log 1}{2\arcsin x} = 1.$$

Außerdem ist arcsin in 0 differenzierbar mit $\arcsin'(0) = 1$ und somit $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$. Wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + 2\arcsin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + 2\arcsin x) - \log 1}{2\arcsin x} = 2.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt nun

$$\lim_{x\to 0}(1 + 2\arcsin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log(1+2\arcsin x)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2\arcsin x)}{x}} = e^2.$$

b) **(5 Punkte)** Wir schreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(1 + 4|x|)^{k-1}} = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1 + 4|x|}\right)^{k-1} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1 + 4|x|}\right)^{k}.$$

Bei der gegebenen Reihe handelt es sich also um eine geometrische Reihe, welche genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\left|\frac{x^2}{1+4|x|}\right| < 1$ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2}{1 + 4|x|}\right| < 1 \;&\Leftrightarrow\; |x^2| - 4|x| - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; (|x| - 2)^2 - 5 < 0 \;\Leftrightarrow\; ||x| - 2| < \sqrt{5} \\
&\Leftrightarrow\; |x| \in (2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}) \;\Leftrightarrow\; |x| < 2 + \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

D.h. die Reihe konvergiert genau für alle $x \in (-2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$. Für diese x erhält man als Reihenwert

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1 + 4|x|}\right)^k = x^2 \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1+4|x|}} = \frac{x^2 + 4x^2|x|}{1 + 4|x| - x^2}.$$

Aufgabe 2

a) **i)** **(4 Punkte)** Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x \cos x \cdot \left(\sin \frac{1}{x^2}\right)^4 + (\sin x)^2 \cdot 4 \left(\sin \frac{1}{x^2}\right)^3 \cos \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right) \\ &= 2\sin x \cos x \cdot \left(\sin \frac{1}{x^2}\right)^4 - \frac{8}{x^3}(\sin x)^2 \left(\sin \frac{1}{x^2}\right)^3 \cos \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}(\sin h)^2 \left(\sin \frac{1}{h^2}\right)^4\right| = |\sin h| \left|\frac{\sin h}{h}\right| \left|\sin \frac{1}{h^2}\right|^4 \to 0,\ h \to 0,$$

da einerseits $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$ ist und andererseits $\frac{\sin h}{h}$ und $\sin \frac{1}{h^2}$ beschränkt sind. Hieraus folgt, dass f auch in $x = 0$ differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.

ii) **(1 Punkt)** Da f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auch auf $\mathbb{R}$ stetig.

b) **(5 Punkte)** Wir setzen $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto 3^t$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu $x, y \in [-1,1]$ ein $\xi \in [-1,1]$ mit

$$3^x - 3^y = f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y).$$

Weiter gilt $f'(t) = 3^t \log 3,\ t \in [-1,1]$. Da f' auf $[-1,1]$ monoton wachsend ist, gilt $\sup\limits_{t\in[-1,1]} |f'(t)| = 3^1 \log 3 = \log 27$ und somit

$$|3^x - 3^y| = |f'(\xi)||x-y| \leqslant \log(27)|x-y|.$$

Aufgabe 3

a) **i)** **(2 Punkte)** Da $\sinh(x+1) \geqslant 0$ für $x \geqslant -1$ und $\sinh(x+1) \leqslant 0$ für $x \leqslant -1$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{1} |\sinh(x+1)|\, dx &= -\int_{-2}^{-1} \sinh(x+1)\, dx + \int_{-1}^{1} \sinh(x+1)\, dx \\ &= -\cosh(x+1)\Big|_{-2}^{-1} + \cosh(x+1)\Big|_{-1}^{1} = -2\cosh(0) + \cosh(-1) + \cosh(2) \\ &= -2 + \frac{1}{2}(e^2 + e + e^{-1} + e^{-2}). \end{aligned}$$

ii) **(2 Punkte)** Die Substitution $u = \sin x,\ du = \cos x\, dx$ führt auf

$$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin x)^2}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{u}{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}\log(1+u^2)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\log 2.$$

iii) **(3 Punkte)** Hier führen die Substitutionen $x = t^2,\ dx = 2t\, dt$ und $t = 2u,\ dt = 2\, du$ auf

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{4t + t^3}\, dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{4(1 + (\frac{t}{2})^2)}\, dt = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= \arctan u\Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \arctan(\sqrt{3}/2) - \arctan(1/2). \end{aligned}$$

b) (3 Punkte) Wir verwenden partielle Integration mit $u'(t) = f(t)$ und $v(t) = x - t$. Da f stetig ist, wird nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung durch $u(t) = \int_0^t f(u)\,du$ eine Stammfunktion von u' definiert. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)(x-t)\,dt &= \int_0^t f(u)\,du \cdot (x-t)\Big|_{t=0}^{x} - \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right) \cdot (-1)\,dt \\ &= \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right) dt.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) i) (1 Punkt) Ist $x = 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \sin(0) = 0$. Es sei nun $x \in (0,2]$. Dann gilt nach Definition von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $f_n(x) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$. Somit ist auch hier $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Insgesamt gilt also: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$.

ii) (2 Punkte) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,2]$ nicht gleichmäßig gegen f, falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0\ \exists x \in [0,1]: \quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := \frac{1}{2n}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{2n}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Setzen wir nun $\varepsilon := \frac{1}{2}$, so finden wir also zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geqslant n_0$ und ein $x \in [0,2]$ (nämlich $x = x_n = \frac{1}{2n}$) mit $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \geqslant \varepsilon$. Hieraus folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,2]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

b) i) (2 Punkte) Es gilt $\lim_{n\to\infty} g_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Für $x \in (0,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{n} + x} = x.$$

Also konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ punktweise gegen $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$.

ii) (3 Punkte) Für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$g(x) - g_n(x) = x - \frac{nx^2}{1+nx} = \frac{x + nx^2 - nx^2}{1+nx} = \frac{x}{1+nx} =: h_n(x).$$

Die Funktion $h_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h_n(x)$, ist differenzierbar mit

$$h_n'(x) = \frac{1 + nx - nx}{(1+nx)^2} = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0.$$

Hieraus folgt, dass h_n auf $[0,1]$ streng monoton wachsend ist und

$$\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| = \max_{x\in[0,1]} |h_n(x)| = h_n(1) = \frac{1}{n+1}.$$

iii) (2 Punkte) Aus ii) erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\forall x \in [0,1]: \quad |g_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Da $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Funktion g auf $[0,1]$.