Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
26.01.2013

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((3+2+5) Punkte)

a) Die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei nicht konvergent. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Geben Sie entweder eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) Keine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii) Die Menge $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht nach oben beschränkt.

iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge.

b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Entscheiden Sie wieder, welche der folgenden Aussagen wahr und welche nicht wahr sind, und geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) Wenn die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ii) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

i) $\sqrt{i}$ ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k$.

Aufgabe 2 ((5+5) Punkte)

a) Sei $0 < a < 1$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{a + x_n}{1 + x_n}.$$

Zeigen Sie:

i) $x_n > \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist streng monoton fallend.

iii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} \quad ?$$

Berechnen Sie für diese x den Wert der Reihe.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 ((7+3) Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := e^{-n\sin x}.$$

i) Bestimmen Sie die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegen die die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

ii) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig konvergent ist.

iii) Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[\varepsilon, 1]$.

b) Die Funktion $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) = |x-1| + 3x - x^2.$$

Zeigen Sie, dass g eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4 ((3+4+3) Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \exp(\sqrt{1+\sin x}) - e$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von f im Punkt 0.

b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale (falls diese existieren):

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

ii) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{\tan x}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den 06.02.2013, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 07.02.2013, von 13.45 Uhr bis 14.00 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianzgebäude 05.20) möglich.