

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1: (3+3+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\sum_{k=1}^n (3k-1)k = n^2(n+1)$$

(b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert. Berechnen Sie diesen gegebenenfalls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + 8056n + 2014} - 2n$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n \geq 4} \frac{n-2}{(n-3)^2} x^n$$

Aufgabe 2: (5 + 5 Punkte)

Seien $\alpha, \beta > 0$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^2 - \alpha \cos(\beta x)}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta > 0$, so dass f auf \mathbb{R} stetig ist.

(b) Seien nun $\alpha = 1$ und $\beta = 2$. Berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 3: ((2 + 3) + (2 + 3) Punkte)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-n \cdot \tan(x)} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

gegeben.

- (i) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, für die $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
- (ii) Für welche $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\left[a, \frac{\pi}{2}\right)$?

(b) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \sin(x) - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

- (i) g eine Nullstelle x^* mit $x^* \in [0, 2]$ hat und, dass
- (ii) x^* die einzige Nullstelle von g auf \mathbb{R} ist.

Aufgabe 4: ((2 + 2 + 2) + (2 + 2) Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale:

- (i) $\int_0^{2\pi} x^2 \sin(x) dx$
- (ii) $\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$
- (iii) $\int_0^1 \frac{x \cos(\arctan(x))}{1+x^2} dx$

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Berechnen Sie diese gegebenenfalls:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(3x)) - 1}{x^2}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **11.02.2014**, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **13.02.2014**, von 13:00 Uhr bis 14:00 Uhr im Zimmer 1C-02 (Allianzgebäude 05.20) möglich.