Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
01.02.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1:

(a) Beweis durch Vollständige Induktion:

- *IA*: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)k = (3-1)\cdot 1 = 2 = n^2(n+1)$$

- *IS*: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV*:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)k = n^2(n+1)$$

Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(3k-1)k &= (3(n+1)-1)(n+1) + \sum_{k=1}^{n}(3k-1)k \\ &\overset{\text{IV}}{=} (3(n+1)-1)(n+1) + n^2(n+1) = (n+1)(n^2+3n+2) \\ &= (n+1)(n+1)(n+2) = (n+1)^2(n+2)\end{aligned}$$

$\square$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{4n^2+8056n+2014}-2n &= \frac{\left(\sqrt{4n^2+8056n+2014}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+8056n+2014}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+8056n+2014}+2n} \\ &\overset{\text{3. Binom.}}{=} \frac{4n^2+8056n+2014-4n^2}{\sqrt{4n^2+8056n+2014}+2n} = \frac{8056n+2014}{\sqrt{4n^2+8056n+2014}+2n} \\ &= \frac{n\left(8056+\frac{2014}{n}\right)}{2n\left(\sqrt{1+\frac{8056}{4n}+\frac{2014}{4n}}+1\right)} = \frac{8056+\frac{2014}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{8056}{4n}+\frac{2014}{4n}}+1\right)}\end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+8056n+2014}-2n = \lim_{n\to\infty}\frac{8056+\frac{2014}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{8056}{4n}+\frac{2014}{4n}}+1\right)} = \frac{8056}{2\cdot 2} = 2014$$

(c) Sei $a_n := \frac{n-2}{(n-3)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$. Es gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)-2}{((n+1)-3)^2}\cdot\frac{(n-3)^2}{n-2} = \frac{n-1}{n-2}\cdot\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Damit ist $\rho = 1$ der Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe. Also ist die Reihe (absolut) konvergent für $-1 < x < 1$ und divergent für $|x| > 1$. Weiterer Untersuchung bedürfen die Randpunkte.

Für alle $n \geq 4$ gilt:

$$a_n = \frac{n-2}{(n-3)^2} = \frac{n-3+1}{(n-3)^2} = \frac{1}{n-3} + \frac{1}{(n-3)^2}$$

Folglich ist die Potenzreihe bei $x = 1$

$$\sum_{n\geq 4} a_n x^n = \sum_{n\geq 4} \left(\frac{1}{n-3} + \frac{1}{(n-3)^2} \right) \geq \sum_{n\geq 4} \frac{1}{n-3} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

divergent nach dem Minorantenkriterium.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist (siehe obige Darstellung) und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ist die Potenzreihe bei $x = -1$

$$\sum_{n\geq 4} a_n x^n = \sum_{n\geq 4} (-1)^n \left(\frac{1}{n-3} + \frac{1}{(n-3)^2} \right)$$

konvergent nach Leibniz-Kriterium.

Zusammenfassend: Die Potenzreihe ist genau für $x \in [-1, 1)$ konvergent.

Aufgabe 2:

(a) Klar: f ist in allen $x \neq 0$ stetig und

$$f \text{ stetig in } 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Wegen $\lim_{x\to 0} \left[(1-x^2)^2 - \alpha\cos(\beta x)\right] = 1 - \alpha$ ist

$$0 \neq \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^2 - \alpha\cos(\beta x)}{x^2} \in \{-\infty, \infty\}$$

für alle $\alpha \neq 1$. Also ist $\alpha = 1$ eine notwendige Bedingung dafür, dass f in 0 stetig ist.

Sei im Folgenden $\alpha = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^2 - \alpha\cos(\beta x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1 - 2x^2 + x^4 - \cos(\beta x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4x + 4x^3 + \beta\sin(\beta x)}{\underbrace{2x}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-4x + 4x^3 + \beta\sin(\beta x)}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4 + 12x^2 + \beta^2\cos(\beta x)}{\underbrace{2}_{\neq 0}} \\
&= \frac{\beta^2 - 4}{2}
\end{aligned}$$

Also ist in diesem Fall

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2 - 4}{2} = 0 \Leftrightarrow |\beta| = 2 \Leftrightarrow \beta \in \{-2, 2\}.$$

Zusammenfassend: f ist stetig auf $\mathbb{R}$ genau für $\alpha = 1$ und $\beta \in \{-2, 2\}$.

(b) Klar: Für alle $x \neq 0$ ist f in x differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(1-x^2)(-2x)+2\sin(2x)}{x^2} - 2\frac{(1-x^2)^2-\cos(2x)}{x^3} \\
&= \frac{-4x^2(1-x^2)-2(1-x^2)^2+2x\sin(2x)+2\cos(2x)}{x^3} \\
&= 2\frac{(x^2-1)(x^2+1)+x\sin(2x)+\cos(2x)}{x^3} \\
&= 2\frac{(x^4-1)+x\sin(2x)+\cos(2x)}{x^3}
\end{aligned}$$

Bei $x = 0$ wird der Differenzenquotient untersucht:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1-h^2)^2-\cos(2h)}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-2h^2+h^4-\cos(2h)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(2h)-2h^2}^{\to 0}}{\underbrace{h^3}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(2h)-4h}{\underbrace{3h^2}_{\neq 0 \text{ für } h\neq 0}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{2\sin(2h)-4h}^{\to 0}}{\underbrace{3h^2}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{4\cos(2h)-4}{\underbrace{6h}_{\neq 0 \text{ für } h\neq 0}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{4\cos(2h)-4}^{\to 0}}{\underbrace{6h}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-8\sin(2h)}{\underbrace{6}_{\neq 0}} = 0
\end{aligned}$$

Also ist f in diesem Fall auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Aufgabe 3:

(a) (i) Sei $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann ist

$$\tan(x)\begin{cases} > 0 & \text{falls } x > 0 \\ = 0 & \text{falls } x = 0 \\ < 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und folglich

$$e^{-n\cdot\tan(x)} = \left(\frac{1}{e^{\tan(x)}}\right)^n \to \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 0 \\ = 1 & \text{falls } x = 0 \\ \infty & \text{falls } x < 0 \end{cases} \text{ für } n \to \infty.$$

Zusammenfassend gilt: $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Sei $a = 0$. Nach Aufgabenteil (i), konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ punktweise gegen die Funktion f, die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Klar: f ist nicht stetig in 0, aber für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist f_n stetig auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Also kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

Sei nun $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt wegen der Monotonie des tan und exp:

$$0 \leq f_n(x) = e^{-n\cdot\tan(x)} \leq e^{-n\cdot\tan(a)} = \left(\frac{1}{e^{\tan(a)}}\right)^n =: a_n$$

Wegen $\tan(a) > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ auf $\left[a, \frac{\pi}{2}\right)$.

Zusammenfassend gilt: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau für $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gleichmäßig und zwar gegen die Nullfunktion.

(b) (i) Klar: g ist stetig auf $\mathbb{R}$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{1}{3}0^3 - 0^2 + 2\cdot 0 + \sin(0) - 1 = -1 < 0 \\ g(2) &= \frac{1}{3}2^3 - 2^2 + 2\cdot 2 + \underbrace{\sin(2)}_{\geq -1} - 1 \geq \frac{8}{3} - 4 + 4 - 1 - 1 = \frac{2}{3} > 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat g eine Nullstelle x^* in $[0, 2]$.

□

(ii) Klar: g ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = x^2 - 2x + 2 + \cos(x) = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 1 + \underbrace{\cos(x)}_{\geq -1} \geq 0$$

sowie

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \wedge \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \text{falsch}.$$

Damit ist $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und g ist streng monoton wachsend nach dem Mittelwertsatz. Also ist x^* in der Tat die einzige Nullstelle von g.

□

Aufgabe 4:

(a) (i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \underbrace{x^2}_{u(x)} \underbrace{\sin(x)}_{v'(x)} \, \mathrm{d}x &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \left[-x^2\cos(x)\right]_{x=0}^{x=2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -4\pi^2 + \int_0^{2\pi} \underbrace{2x}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} \, \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -4\pi^2 + \left[2x\sin(x)\right]_{x=0}^{x=2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= -4\pi^2 + 2\left[\cos(x)\right]_{x=0}^{x=2\pi} = -4\pi^2 \end{aligned}$$

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x &\overset{y=x^2}{=} \int_0^4 \frac{1}{2(1+y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{1}{(1+y)^{\frac{3}{2}}} \\ &\overset{z=1+y}{=} \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}z = -\left[\frac{1}{\sqrt{z}}\right]_{z=1}^{z=5} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

(iii) Es gilt:

$$\int_0^1 \frac{x\cos(\arctan(x))}{1+x^2}\mathrm{d}x \overset{x=\tan(y)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(y)\cos(y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(y)\mathrm{d}y$$
$$= -\left[\cos(y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) (i) Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos(\sin(3x)) - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos(3x)\sin(\sin(3x))}{\underbrace{2x}_{\neq 0 \text{ für } x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-3\cos(3x)\sin(\sin(3x))}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}}$$
$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} 3\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)\sin(\sin(3x)) - 3\cos^2(3x)\cos(\sin(3x))}{\underbrace{2}_{\neq 0}}$$
$$= -\frac{9}{2}$$

(ii) Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{3x} - 5x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(e^{3x}-5x)}{x}} \overset{\text{Stetigkeit}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\log(e^{3x} - 5x)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}\right)$$
$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x} - 5}{e^{3x} - 5x}\right) = e^{-2}$$