Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
24.01.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$\prod_{k=0}^{n}(1 + x^{(2^k)}) = \frac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1 - x}.$$

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + \frac{1}{4^n}}.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x-2)^n}{\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 2 ((2+3)+(1+3+1)=10 Punkte)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\pi \sin^2(\frac{1}{x})) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

(i) In welchen $x \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

(ii) In welchen $x \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar? Geben Sie dort die Ableitung f' an.

b) Die Funktion $g : [2,5] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 5x - 4\log(x-1).$$

(i) Zeigen Sie, dass g mindestens eine Nullstelle besitzt.

(ii) Weisen Sie nach, dass

$$\frac{7}{2}|x-y| \leqslant |g(x) - g(y)| \leqslant 5|x-y| \qquad \forall x, y \in [2,5].$$

Hinweis: Finden Sie die Extrema von g' auf $[2,5]$ durch Betrachtung von g''.

(iii) Folgern Sie nun, dass g genau eine Nullstelle besitzt.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 ((4+3)+3 = 10 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-(x^n)}$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge $(f_n(x))$ konvergiert und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

(ii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf gleichmäßige Konvergenz auf den Intervallen $[0, \infty)$ und $[2, \infty)$.

b) Die Funktion $g : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(x) = \log(2x+1)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(g, 0)$ (zweiten Grades, Entwicklungspunkt 0) und zeigen Sie, dass

$$0 \leqslant g(x) - T_2(g,0)(x) \leqslant \frac{8}{3}x^3$$

für alle $x \geqslant 0$ gilt.

Aufgabe 4 ((2+3)+(2+3)=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+5}\,\mathrm{d}x.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x.$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\mathrm{e}+2x^2) - \cos^2(x)}{x^2}.$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} (\cos(x) + \log(x+1))^{\frac{1}{x}}.$

Viel Erfolg!

Hinweis für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 03.02.2015, bei Frau Dr. Nagato-Plum (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind am Donnerstag, den 05.02.2015, von 13 bis 14 Uhr in Zimmer 1C-02 (Allianzgebäude 05.20) und am Freitag, den 06.02.2015, unmittelbar nach der Übung um 15:30 möglich.