Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
24.01.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$\prod_{k=0}^{n}(1 + x^{(2^k)}) = \frac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1 - x}.$$

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + \frac{1}{4^n}}.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x-2)^n}{\sqrt{n}}.$$

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen die Aussage induktiv. Sei dazu $x \neq 1$ beliebig.
Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Es gilt

$$\prod_{k=0}^{0}(1 + x^{(2^k)}) = 1 + x^{(2^0)} = 1 + x = (1+x) \cdot \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x} = \frac{1-x^{2(0+1)}}{1-x}.$$

Induktionsschritt: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (**Induktionsvoraussetzung (IV)**). Dann gilt ($n \to n+1$)

$$\prod_{k=0}^{n+1}(1 + x^{(2^k)}) = \prod_{k=0}^{n}(1 + x^{(2^k)}) \cdot (1 + x^{(2^{n+1})}) \overset{IV}{=} \frac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1-x} \cdot (1 + x^{(2^{n+1})})$$
$$\overset{Bin.For.}{=} \frac{1 - (x^{(2^{n+1})})^2}{1-x} = \frac{1 - x^{(2^{n+2})}}{1-x}.$$

b) Laut Vorlesung ist die n-te Wurzel monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$. Wegen

$$3^n \leqslant 3^n + \frac{1}{4^n} \leqslant 2 \cdot 3^n$$

gilt demnach

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant \sqrt[n]{3^n + \frac{1}{4^n}} \leqslant \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} 3.$$

Nach dem Einschnürungssatz über die Konvergenz von Folgen gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + \frac{1}{4^n}} = 3.$$

c) Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist gegeben durch

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{(-2)^n}{n^{\frac{1}{2}}}|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{1}}} = \frac{1}{2}.$$

Da der Entwicklungspunkt der Potenzreihe 2 ist, konvergiert diese also auf dem Intervall $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ und divergiert außerhalb des Intervalls $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$. Für $x = \frac{3}{2}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x-2)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$ divergiert diese Reihe nach dem Minorantenkriterium. Für $x = \frac{5}{2}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x-2)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Da $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert diese Reihe nach dem Leibnitzkriterium.
Ingesamt konvergiert die gegebene Potenzreihe also genau dann, wenn $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

Aufgabe 2 ((2+3)+(1+3+1)=10 Punkte)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\pi \sin^2(\frac{1}{x})) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

(i) In welchen $x \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

(ii) In welchen $x \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar? Geben Sie dort die Ableitung f' an.

b) Die Funktion $g : [2,5] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 5x - 4\log(x-1).$$

(i) Zeigen Sie, dass g mindestens eine Nullstelle besitzt.

(ii) Weisen Sie nach, dass

$$\frac{7}{2}|x-y| \leqslant |g(x) - g(y)| \leqslant 5|x-y| \qquad \forall x,y \in [2,5].$$

Hinweis: Finden Sie die Extrema von g' auf $[2,5]$ durch Betrachtung von g''.

(iii) Folgern Sie nun, dass g genau eine Nullstelle besitzt.

Lösungsvorschlag

a) (i) In $x \neq 0$ ist f stetig als Komposition der stetigen Funktionen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \pi x$, $x \mapsto x$. Für $x \neq 0$ gilt ebenso

$$0 \leqslant |f(x) - f(0)| = |x| \cdot \underbrace{|\cos(\pi \sin^2(1/x))|}_{\leqslant 1} \leqslant |x| \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

Somit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(ii) In $x \neq 0$ ist f differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen (siehe oben) und es gilt mit Produkt- und Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\pi \sin^2(1/x)) + x \cdot (-\sin(\pi \sin^2(1/x))) \cdot 2\pi \sin(1/x) \cos(1/x) \cdot (-1/x^2) \\ &= \cos(\pi \sin^2(1/x)) + \frac{2\pi \sin(\pi \sin^2(1/x)) \sin(1/x) \cos(1/x)}{x}. \end{aligned}$$

Damit f in 0 differenzierbar wäre, müsste der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

existieren. Es gilt jedoch

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \cos(\pi \sin^2(\frac{1}{x})).$$

Betrachten wir die Folge $x_n = \frac{2}{n\pi}$, so gilt $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$\cos(\pi \sin^2(1/x_n)) = \cos(\pi \sin^2(n\pi/2)) = \begin{cases} \cos(\pi \cdot 0) = 1 & , n \text{ gerade}, \\ \cos(\pi \cdot 1) = -1 & , n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Also existiert der obige Grenzwert nicht und f ist somit in 0 nicht differenzierbar.

b) (i) Es gilt

$$g(2) = \frac{1}{6} \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 4\log(1) = \frac{4}{3} + 2 > 0$$

und

$$g(5) = \frac{1}{6} \cdot 125 - 2 \cdot 25 + 5 \cdot 5 - 4\log(4) = \frac{125}{6} - 25 - 4\log(4) < 21 - 25 - 0 = -4 < 0.$$

Da g eine stetige Funktion ist, liefert der Zwischenwertsatz, dass g (mindestens) eine Nullstelle besitzt.

(ii) g ist eine überall differenzierbare Funktion, womit der Mittelwertsatz für alle $x, y \in [2,5]$ ein $\xi \in (x,y)$ liefert mit

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x - y|.$$

Für die Ableitung g' gilt

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x-1}.$$

Nun brauchen wir die (betragsmäßigen) Extremwerte dieser Funktion auf $[2,5]$. Da dieses Intervall kompakt ist und g' stetig, werden diese angenommen und befinden sich deshalb an den Randpunkten oder an Stellen, an denen $g''(x) = 0$ gilt (wir bemerken dazu, dass g' differenzierbar ist). Es folgt

$$g''(x) = x - 4 + \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 3.$$

Wegen $g'(2) = -5$, $g'(5) = -\frac{7}{2}$, $g'(3) = -\frac{9}{2}$ folgt

$$\max_{x\in[2,5]} |g'(x)| = 5, \qquad \min_{x\in[2,5]} |g'(x)| = \frac{7}{2}$$

und deshalb, indem wir das Ergebnis des Mittelwertsatzes nach oben und unten abschätzen,

$$\frac{7}{2}|x-y| \leqslant |g(x) - g(y)| \leqslant 5|x-y| \qquad \forall x, y \in [2,5].$$

(iii) Nutzen wir die eben gezeigte Ungleichung und nehmen an, dass g zwei Nullstellen x_0 und x_1 mit $x_0 \neq x_1$ besitzt, so gilt

$$0 < \frac{7}{2}|x_0 - x_1| \leqslant |g(x_0) - g(x_1)| = 0,$$

ein Widerspruch. Somit hat g genau eine Nullstelle (da es nach (i) mindestens eine besitzt).

Aufgabe 3 ((4+3)+3 = 10 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-x^n}$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge $(f_n(x))$ konvergiert und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

(ii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf gleichmäßige Konvergenz auf den Intervallen $[0,\infty)$ und $[2,\infty)$.

b) Die Funktion $g : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(x) = \log(2x+1)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(g,0)$ (zweiten Grades, Entwicklungspunkt 0) und zeigen Sie, dass

$$0 \leqslant g(x) - T_2(g,0)(x) \leqslant \frac{8}{3}x^3$$

für alle $x \geqslant 0$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) (i) Für $x > 1$ gilt $x^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, also $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Für $x = 1$ gilt $f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $x \in (-1,1)$ gilt $|x^n| = |x|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{-0} = 1$.
Für $x = 1$ gilt $f_n(x) = \mathrm{e}^{-1}$ für n gerade und $f_n(x) = \mathrm{e}$ für n ungerade, womit die Folge $(f_n(x))$ nicht konvergiert. Für $x < -1$ gilt $-x^{2k} \to \infty$ für $k \to \infty$, also $f_{2k}(x) \to \infty$ für $k \to \infty$. $(f_n(x))$ hat also eine divergente Teilfolge und ist deshalb divergent. Insgesamt konvergiert (f_n) also auf $(-1,\infty)$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x > 1, \\ \frac{1}{\mathrm{e}} & , x = 1, \\ 1 & , -1 < x < 1. \end{cases}$$

(ii) Auf dem Intervall $[0,\infty)$ ist die punktweise Grenzfunktion f nicht stetig, weshalb die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann.
Für $x \in [2,\infty)$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = \mathrm{e}^{-x^n} \leqslant \mathrm{e}^{-2^n}$$

wegen der Monotonie der Exponentialfunktion und der Tatsache, dass $x^n \geqslant y^n$, wenn $x \geqslant y \geqslant 0$. Also gilt

$$\sup_{x\in[2,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \mathrm{e}^{-2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

womit die gleichmäßige Konvergenz gezeigt ist.

b) Die Funktion g ist auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{2x+1}, \\ g''(x) &= -\frac{4}{(2x+1)^2}, \\ g'''(x) &= \frac{16}{(2x+1)^3}. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom zweiten Grades von g mit Entwicklungspunkt 0 ist gegeben durch

$$T_2(g,0)(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2} g''(0)x^2 = 0 + 2x - 2x^2 = 2x(1-x)$$

für $x > -\frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor existiert zu jedem $x \geqslant 0$ ein $\xi \in [0,x]$ mit

$$g(x) = T_2(g,0)(x) + \frac{g'''(\xi)}{3!} x^3,$$

also

$$0 \leqslant \frac{g'''(\xi)}{6} x^3 = g(x) - T_2(g,0) = \frac{g'''(\xi)}{6} x^3 \leqslant \frac{16}{6} x^3 = \frac{8}{3} x^3,$$

Da g''' positiv und monoton fallend ist auf $[0,\infty)$.

Aufgabe 4 ((2+3)+(2+3)=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+5}\,\mathrm{d}x.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x.$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\mathrm{e}+2x^2)-\cos^2(x)}{x^2}.$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} (\cos(x)+\log(x+1))^{\frac{1}{x}}.$

Lösungsvorschlag

a) (i) Der Integrand ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, womit das Integral existiert. Wir erkennen, dass im Zähler die Ableitung des Nenners steht. Somit berechnen wir direkt (alternativ über die Substitution $y = x^3+2x+5$), dass

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+5}\,\mathrm{d}x = [\log(x^3+2x+5)]_0^1 = \log(8)-\log(5) = \log(8/5).$$

(ii) Der Integrand ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, womit das Integral existiert. Entweder wir benutzen $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ und substituieren danach $y = \cos(x)$, womit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$, also $\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\cos^3(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subst.}}{=} -\int_1^0 y^3-y^5\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 y^3-y^5\,\mathrm{d}y = [\frac{y^4}{4}-\frac{y^6}{6}]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Alternativ folgt auch mit partieller Integration ($-\frac{1}{4}\cos^4$ ist eine Stammfunktion von $\sin\cos^3$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2(x)}_{u}\underbrace{\sin(x)\cos^3(x)}_{v'}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{[-\frac{1}{4}\sin^2(x)\cos^4(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^5(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [-\frac{1}{12}\cos^6(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

b) (i) Es gilt $\lim_{x\to 0}\log(\mathrm{e}+2x^2)-\cos^2(x) = \log(\mathrm{e})-\cos(0) = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$. Zudem sind Zähler und nenner differenzierbar und die Ableitung des Nenners, gegeben durch $2x$, ist außerhalb der 0 nicht Null. Nach der Regel von de L'Hospital gilt also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\mathrm{e}+2x^2)-\cos^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{\mathrm{e}+2x^2}+2\sin(x)\cos(x)}{2x},$$

falls der zweite Grenzwert existiert. Auch hier gilt wieder $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\mathrm{e}+2x^2}+2\sin(x)\cos(x) = 0 = \lim_{x\to 0} 2x$ und die Ableitung des Nenners, gegeben durch 2, verschwindet nirgends. Nach der Regel von de L'Hospital gilt also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{\mathrm{e}+2x^2}+2\sin(x)\cos(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(\mathrm{e}+2x^2)\cdot 4-4x\cdot 4x}{(\mathrm{e}+2x^2)^2}-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)}{2} = 1+\frac{2}{\mathrm{e}},$$

was damit auch der gesuchte Grenzwert ist.

(ii) Für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt $\cos(x)+\log(x+1) > 0$ und somit

$$(\cos(x)+\log(x+1))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(\cos(x)+\log(x+1))}.$$

Durch die Stetigkeit der Exponentialfunktion reicht es, den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(x)+\log(x+1))}{x}$$

zu berechnen. Es gilt dass $\lim_{x\to 0+} \log(\cos(x)+\log(x+1)) = \log(1+0) = 0$ genau wie $\lim_{x\to 0+} x = 0$. Deshalb folgt mit der Regel von de L'Hospital, dass

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(x)+\log(x+1))}{x} &= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cos(x)+\log(x+1)}\cdot\left(-\sin(x)+\frac{1}{x+1}\right)}{1} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x+1}-\sin(x)}{\cos(x)+\log(x+1)} = 1.\end{aligned}$$

In die Exponentialfunktion eingesetzt ergibt sich

$$\lim_{x\to 0+} (\cos(x)+\log(x+1))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$