Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
30.01.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1 (2+2+3+3=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$a_n := \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^n)^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte.

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1+\frac{2}{n^2}\right).$$

c) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+3}{4n^4+3n^3+1} x^n.$$

d) Untersuchen Sie, ob folgende Reihe (absolut) konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}.$$

Aufgabe 2 (4+(2+4)=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\log(x) = \frac{x^4}{4\mathrm{e}}$$

auf $(0,\infty)$ genau eine Lösung hat.
Hinweis: Die Substitution $t := x^4$ könnte hilfreich sein.

b) (i) Zeigen Sie

$$|\sin(x)| \leqslant x \qquad \forall x \geqslant 0.$$

(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiere $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin^2(x^{-\alpha}), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für welche Werte von α ist g stetig?

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (4+1+3+2 = 10 Punkte)

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ gegeben. Definieren Sie weiter für $x \in [0, 1/2]$ und $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} x^k.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \geqslant 0$

$$f^{(n)}(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

gilt, wobei (wie gewöhnlich) $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f bezeichne.

b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $T_{n,f,0}$ n-ten Grades von f um die Entwicklungsmitte 0 auf $[0, 1/2]$ gegeben ist durch

$$T_{n,f,0}(x) = f_n(x) \qquad \forall x \in [0, 1/2].$$

c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1/2]$ punktweise gegen f konvergiert. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1/2]$ sogar gleichmäßig gegen f?
Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $(\frac{1}{4})^n \binom{2n}{n} \leqslant 1$ gilt.

d) Zeigen Sie für alle $x, y \geqslant 0$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{2}.$$

Aufgabe 4 (4+2+4=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Hinweis: Fassen Sie die Summe als Riemannsumme auf.

b) Untersuchen Sie, ob folgendes Integral konvergiert:

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

c) Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Die (Teil-)Aufgaben dürfen als voneinander unabhängig betrachtet werden. Das heißt, dass die Aussagen einer Teilaufgabe in einer anderen Teilaufgabe verwendet werden dürfen.

Viel Erfolg!

Hinweis für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Montag, den 08.02.2016, bei Frau Dr. Nagato-Plum (Zimmer 2.029, Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind in der Sprechstunde von Herrn Michael Hott (montags, 14-16 Uhr) in Zimmer 2.023 (Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) und am Freitag, den 12.02.2016, unmittelbar nach der Übung um 15:30 möglich.