Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
30.01.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1 (2+2+3+3=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$a_n := \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^n)^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte.

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1+\frac{2}{n^2}\right).$$

c) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+3}{4n^4+3n^3+1}x^n.$$

d) Untersuchen Sie, ob folgende Reihe (absolut) konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}.$$

Lösungsvorschlag

a) Nach dem binomischen Lehrsatz gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^n)^k\,1^{n-k} = 3^{-n}\,(1+(-1)^n+1)^n = 3^{-n}(2+(-1)^n)^n.$$

Damit gilt

$$a_{2n} = 3^{-2n}3^{2n} = 1 \to 1,$$

sowie

$$a_{2n+1} = 3^{-2n-1} \to 0,$$

wenn $n\to\infty$. Nach Vorlesung sind die Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann gerade 0 und 1.

b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n^2\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right) = \log\left[\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}\right].$$

Nun ist $\left((1+\frac{2}{n^2})^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $((1+\frac{2}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche hingegen nach Vorlesung gegen e^2 strebt. Damit strebt dann auch die Teilfolge $\left((1+\frac{2}{n^2})^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen e. Wegen der Stetigkeit von log in e^2 gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1+\frac{2}{n^2}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \;=\; 2.$$

Eine *alternative* Lösung geht über den Differenzenquotienten:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1+\frac{2}{n^2}\right) \;=\; 2\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)-\log(1+0)}{\frac{2}{n^2}-0} \;=\; 2\cdot\log'(1) \;=\; 2.$$

c) Definiere $a_n := \frac{2n^2+3}{4n^4+3n^3+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt nach **Aufgabe 15 a)**

$$\sqrt[n]{|a_n|} \;=\; \frac{\sqrt[n]{2n^2+3}}{\sqrt[n]{4n^4+3n^3+1}} \to 1,$$

wenn $n\to\infty$. Damit ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gerade 1 und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für alle $x\in(-1,1)$ bzw. divergiert für alle $|x|>1$. Weiter gilt für $n\in\mathbb{N}$

$$|a_n| \;=\; \frac{2n^2+3}{4n^4+3n^3+1} \;\leqslant\; \frac{2n^2+3n^2}{4n^4+0} \;=\; \frac{5}{4}\frac{1}{n^2}.$$

Daher konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium absolut, womit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auch für $|x|=1$ konvergiert. Der Term für $n=0$ spielt hier wie immer keine Rolle für die Konvergenz.

d) Wie wir aus der Vorlesung bereits wissen, gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \;=\; 1.$$

Da $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \;\to\; 1,$$

wenn $n\to\infty$. Insbesondere ist $(\sin(1/\sqrt{n})/1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ (als Folge) durch eine Schranke $c\in\mathbb{R}$ beschränkt. Damit erhalten wir für $n\in\mathbb{N}$

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}\right| \;=\; \left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right| \frac{1}{n^{3/2}} \;\leqslant\; \frac{c}{n^{3/2}}.$$

Daher ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}$ wegen des Majorantenkriteriums absolut konvergent. Alternativ hätte man direkt **Aufgabe 2 b)** verwenden können, um die Abschätzung

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}\right| \;\leqslant\; \frac{1}{n^{3/2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu erhalten.

Aufgabe 2 (4+(2+4)=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\log(x) = \frac{x^4}{4e}$$

auf $(0,\infty)$ genau eine Lösung hat.
Hinweis: Die Substitution $t := x^4$ könnte hilfreich sein.

b) (i) Zeigen Sie

$$|\sin(x)| \leqslant x \qquad \forall x \geqslant 0.$$

(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiere $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin^2(x^{-\alpha}), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für welche Werte von α ist g stetig?

Lösungsvorschlag

a) Zunächst gilt wegen $\log(x) = \frac{1}{4}\log(x^4)$

$$\log(x) = \frac{x^4}{4e} \text{ hat genau eine Lösung auf } (0,\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \log(t) = \frac{t}{e} \text{ hat genau eine Lösung auf } (0,\infty),$$

wenn wir $t := x^4$ substituieren. Dabei geht ein, dass die Abbildung $(0,\infty) \to (0,\infty), x \mapsto x^4$ bijektiv ist. Das heißt, dass zu jeder Lösung t_0 der hinteren Gleichung genau eine Lösung x_0 der vorderen Gleichung existiert und umgekehrt.
Definiere nun $d(t) := \frac{t}{e} - \log(t)$ für alle $t > 0$. Es ist

$$d'(t) = \frac{1}{e} - \frac{1}{t}$$

und

$$d'(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = e.$$

Außerdem $d(e) = 0$. Da $d'(t) > 0$, falls $t < e$, und $d'(t) < 0$, falls $t > e$, gelten, ist d links von e streng wachsend und rechts davon streng fallend. Damit gibt es keine weiteren Nullstellen.

b) (i) Für $x = 0$ gilt die Ungleichung trivialerweise. Sei nun $x > 0$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein ξ mit

$$\sin(x) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} x = \cos(\xi) x.$$

Damit erhalten wir

$$|\sin(x)| = |\cos(\xi)| x \leqslant 1 \cdot x = x$$

wie gewünscht. Alternativ lässt sich auch über

$$\sin(x) = \left| \int_0^x \cos(x)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^x |\cos(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^x 1\ \mathrm{d}x = x$$

argumentieren.

(ii) Zunächst einmal ist g außerhalb von 0 in jedem Fall als Komposition stetiger Funktionen wiederum selbst stetig.
Fall 1: $\alpha > 0$. Es gilt für $x > 0$

$$|g(x)| = x^\alpha |\sin^2(x^{-\alpha})| \leqslant x^\alpha$$

und damit $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Daher ist g in diesem Fall in 0 stetig.
Fall 2: $\alpha = 0$. Es gilt für $x > 0$

$$g(x) = 1\sin^2(1) = \sin^2(1) \neq 0.$$

Insbesondere ist g in 0 nicht stetig.
Fall 3: $\alpha < 0$. Definiere $\beta := -\alpha$ und sei $x > 0$ beliebig. Dann gilt

$$|g(x)| = \left|\frac{\sin^2(x^\beta)}{x^{2\beta}}\right| x^{2\beta+\alpha} = \left|\frac{\sin(x^\beta)}{x^\beta}\right|^2 \overset{(\square)}{\leqslant} x^\beta.$$

Damit gilt auch in diesem Fall $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ und g ist stetig in 0.

Aufgabe 3 (4+1+3+2 = 10 Punkte)

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ gegeben. Definieren Sie weiter für $x \in [0, 1/2]$ und $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} x^k.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \geqslant 0$

$$f^{(n)}(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} (1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

gilt, wobei (wie gewöhnlich) $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f bezeichne.

b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $T_{n,f,0}$ n-ten Grades von f um die Entwicklungsmitte 0 auf $[0, 1/2]$ gegeben ist durch

$$T_{n,f,0}(x) = f_n(x) \qquad \forall x \in [0, 1/2].$$

c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1/2]$ punktweise gegen f konvergiert. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1/2]$ sogar gleichmäßig gegen f?
Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $4^{-n}\binom{2n}{n} \leqslant 1$ gilt.

d) Zeigen Sie für alle $x, y \geqslant 0$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{2}.$$

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion. Sei dazu $x \geqslant 0$ beliebig.
Induktionsanfang: Es ist $f^{(0)}(x) = (1+x)^{-1/2} = (-1/4)^0 \frac{(2\cdot 0)!}{0!} (1+x)^{-1/2}$.
Induktionsschritt: Es gelte für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$: $f^{(n)}(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} (1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$

(IV). Dann gilt ($n \to n+1$)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}]'(x) \overset{\textbf{(IV)}}{=} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{-(2n+1)}{2}(1+x)^{-\frac{2n+3}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{2(n+1)(2n+1)}{-4(n+1)}(1+x)^{-\frac{2n+3}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!}(1+x)^{-\frac{2(n+1)+1}{2}}, \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

b) Das Taylorpolynom von f zur Ordnung n ist gegeben durch

$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \overset{\textbf{a)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{k!}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} x^k.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt für alle $x \in [0, 1/2]$ und $n \in \mathbb{N}$ $T_{n,f,0}(x) = f_n(x)$, wie zu zeigen war.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach dem **Satz von Taylor** gibt es für $x \in [0, 1/2]$ ein $\xi \in [0, x]$ mit

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\overset{\textbf{b)}}{=} |T_{n,f,0}(x) - f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \overset{\textbf{a)}}{=} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!(n+1)!} \underbrace{(1+\xi)^{-\frac{2n+3}{2}}}_{\leqslant 1} \underbrace{x^{n+1}}_{\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \binom{2(n+1)}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \overset{\textbf{Hinweis}}{\leqslant} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine (reelle) Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha_n := 2^{-n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gefunden mit $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ für alle $x \in [0, 1/2]$ und $n \in \mathbb{N}$, weshalb $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht nur punktweise, sondern sogar gleichmäßig gegen f konvergiert.

d) Es gilt $f'(x) = -1/2(1+x)^{-3/2}$ für alle $x \geqslant 0$. Sei $x > y \geqslant 0$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) ein $\xi \in (y, x)$ mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Insbesondere gilt dann

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|,$$

wie zu zeigen war.

Aufgabe 4 (4+2+4=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Hinweis: Fassen Sie die Summe als Riemannsumme auf.

b) Untersuchen Sie, ob folgendes Integral konvergiert:

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \, \mathrm{d}x.$$

c) Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4x+5}\ \mathrm{d}x.$$

Lösungsvorschlag

a) Definiere $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Da f (streng) monoton fallend ist, ist der letzte Ausdruck gerade die Untersumme von f auf $[0,1]$ bzgl. der Äquidistanzpartition $Z_n = \{\frac{j}{n} \,\big|\, j \in \{0;1;2;\ldots;n\}\}$. Weiter ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}(f(0)-f(1))$$

eine Obersumme von f auf $[0,1]$, ebenfalls bzgl. der Äquidistanzpartition. Damit gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}(f(0)-f(1))$$

und damit wegen des Sandwichkriteriums gerade

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Alternativ kann man mit **Satz 11.5** argumentieren, dass eine Riemannsumme einer (Riemann-)integrierbaren Funktion stets gegen das Integral konvergiert.

b) Sei zunächst $0 < a < 1$. Es ist $|\cos\left(\frac{1}{x}\right)| \leqslant 1$ für alle $x > 0$ und damit gilt wegen der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\Big|\int_a^{\pi} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_a^1 \Big|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\Big|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^{\pi} 1\ \mathrm{d}x = \pi(1-a).$$

Insbesondere ist dann

$$\Big|\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x\Big| = \Big|\lim_{a\to 0}\int_a^{\pi} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x\Big| \leqslant \pi < \infty.$$

Wegen des Majorantenkriteriums konvergiert daher $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x$ (absolut).

c) Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4x+5}\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\ \mathrm{d}x - 4\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2+4x+5}}_{=[(x+2)^2+1]^{-1}}\ \mathrm{d}x \\ &= \Big[\log(x^2+4x+5) - 4\arctan(x+2)\Big]_0^1 = \log(10) - \log(5) - 4\arctan(3) + 4\arctan(2) \\ &= \log(2) - 4\arctan(3) + 4\arctan(2)\end{aligned}$$