Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

WS2016/17
28.01.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1: (4 + 2 + 4 = 10 Punkte)

(a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Hinweis: Die Formeln $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ und $\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$ für $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ sind aus der Vorlesung bekannt und dürfen ohne Beweis verwendet werden.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge

$$(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{x^n}{4^n + 3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert und berechnen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} (x-1)^n$$

konvergiert.

Aufgabe 2: (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \arctan\left(x^3\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $f'(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist. Ist f stetig differenzierbar?

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \int_0^x e^{-s^2} \sin(s) \mathrm{d}s \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(g; 0)$ und zeigen Sie

$$|T_2(g;0)(x) - g(x)| \leq \frac{11}{6} x^3 \qquad \forall x \in [0, 1].$$

(c) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge M aller $z \in \mathbb{C}$, die der Bedingung

$$|z|^2 \leq 3 + 2 \operatorname{Im}(z)$$

genügen.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{1}{n}\right)}{x(x + \frac{1}{n})} \qquad \forall x > 0$$

gegeben. Untersuchen Sie (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Hinweis: Betrachten Sie bestimmte Nullstellen von f_n.

(b) Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \mathrm{d}x$,

(ii) $\int_0^1 x(x-1)e^x \mathrm{d}x$ und

(iii) $\int_0^\pi x \cos(x) \sin(x) \mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen Zwischensummen den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \right).$$

Aufgabe 4: (5 + 5 = 10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = xy^2 - x, \qquad y(0) = 0$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \ln(x) - \sin(x) \qquad \forall x > 0$$

genau eine Nullstelle hat.

Hinweis: Nutzen Sie Stetigkeit von f aus. Untersuchen Sie f auf strenge Monotonie.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **07.02.2017**, im Sekretariat (Zimmer, 2.029, Gebäude 20.30) abgeholt werden.
Fragen zur Korrektur (Klausureinsicht) werden ausschließlich am Donnerstag, den **09.02.2017**, von **13:00** bis **14:00** im Besprechungsraum (Zimmer 2.063, Gebäude 20.30) beantwortet.