Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

WS2016/17
28.01.2017

Lösungsvorschläge zur Übungs- bzw. Scheinklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1:

(a) Führe einen Beweis durch vollständige Induktion über n.

- *IA* ($n = 1$):
  Für $n = 1$ gilt
  $$\sum_{k=1}^{1} k\binom{1}{k} = 1 = 1 \cdot 2^0.$$

- *IS* ($n \rightsquigarrow n+1$):
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Induktionsvoraussetzung (IV)
  $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$
  Dann gilt für $n+1$
  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= (n+1)\binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k} \\
  &\overset{\text{Hinweis}}{=} (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1} \\
  &\underset{\text{Indexshift}}{\overset{\text{(IV),}}{=}} n+1+n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k} \\
  &= n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} \\
  &= n2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
  &\underset{\text{Hinweis}}{\overset{\text{(IV),}}{=}} n2^{n-1} + n2^{n-1} + 2^n = (n+1)2^n.
  \end{aligned}$$

Alternativ, betrachte die Polynomfunktion $x \overset{f}{\mapsto} (1+x)^n$. Nach dem binomischen Satz gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt für die Ableitung nach der Kettenregel
$$n(x+1)^{n-1} = f'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Einsetzen von $x = 1$ liefert die zu zeigende Gleichung.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n(x) = \frac{x^n}{4^n + 3^n} = \underbrace{\left(\frac{x}{4}\right)^n}_{=:b_n(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}}_{=c_n}.$$

Es ist $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$. Also konvergiert $(a_n(x))$ genau dann, wenn $(b_n(x))$ konvergiert. In diesem Fall stimmen die Grenzwerte überein.

Ist $|x| < 4$, so ist $(b_n(x))$ konvergent gegen 0.

Ist $x = 4$, so ist $(b_n(x)) \equiv 1$ konvergent gegen 1.

Ist $x = -4$, so ist $(b_n(x)) = ((-1)^n)$ divergent.

Ist $|x| > 4$, so ist $(b_n(x))$ divergent, weil $|b_n| = \frac{|x|}{4} \to \infty$.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{=:a_n} \Big(\underbrace{\frac{1-x}{2}}_{=:y}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n.$$

Für den Konvergenzradius r der Potenzreihe in y gilt nach dem Quotientenkriterium

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Also ist die Potenzreihe (absolut) konvergent für alle $|y| < 1$ bzw.

$$|y| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |1-x| < 2 \Leftrightarrow -2 < 1-x < 2 \Leftrightarrow -3 < -x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Für $|y| > 1$ bzw. $x < -1$ oder $x > 3$ ist die Potenzreihe divergent.

Für $y = 1$ bzw. $x = -1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die divergente harmonische Reihe.

Für $y = -1$ bzw. $x = 3$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent nach dem Leibniz-Kriterium.

Insgesamt konvergiert die vorgelegte Potenzreihe genau für $x \in (-1, 3]$.

$\square$

Aufgabe 2:

(a) Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. In solchen x gilt für die Ableitung nach der Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = 3x^2 \frac{1}{x(1+x^6)} - \frac{\arctan(x^3)}{x^2} = \frac{3x}{1+x^6} - \frac{\arctan(x^3)}{x^2}.$$

Bei $x = 0$ gilt für den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\arctan(h^3)}^{\xrightarrow{h\to 0} 0}}{\underbrace{h^2}_{\xrightarrow{h\to 0} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 \frac{1}{1+h^6}}{\underbrace{2h}_{\neq 0 \text{ für } h \neq 0}} = \frac{3}{2} \lim_{h\to 0} \frac{h}{1+h^6} = 0.$$

Folglich ist f bei $x=0$ differenzierbar und $f'(0)=0$.

Als Verkettung stetiger Funktionen, ist f' in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Bei $x=0$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{3x}{1+x^6} - \frac{\arctan(x^3)}{x^2} \right] \\
&= \underbrace{\lim_{x\to 0} \left[\frac{3x}{1+x^6} \right]}_{=0} - \underbrace{\lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \frac{\arctan(h^3)}{h} \right]}_{=f'(0)} = 0 = f'(0).
\end{aligned}$$

Also ist f' auch in $x=0$ stetig und $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(b) Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung ist g differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = e^{-x^2} \sin(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Berechne weiter

$$\begin{aligned}
g''(x) &= e^{-x^2} \left(-2x\sin(x) + \cos(x)\right), \\
g'''(x) &= e^{-x^2} \Big(4x^2 \sin(x) - 2x\cos(x) - 2\sin(x) - 2x\cos(x) - \sin(x)\Big) \\
&= e^{-x^2} \Big(4x^2 \sin(x) - 4x\cos(x) - 3\sin(x)\Big),
\end{aligned}$$

ebenfalls für jedes $x \in \mathbb{R}$. Damit lautet das gesuchte Taylorpolynom

$$T_2(g;0)(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 + 0 + \frac{1}{2!} x^2 = \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Satz von Taylor existiert zu jedem $x \in [0,1]$ ein ξ zwischen 0 und x derart, dass

$$\begin{aligned}
|T_2(g;0)(x) - g(x)| &= \left| \frac{g'''(\xi)}{3!} x^3 \right| = \frac{1}{6} e^{-\xi^2} \left|4\xi^2 \sin(\xi) - 4\xi\cos(\xi) - 3\sin(\xi)\right| x^3 \\
&\leq \frac{1}{6} \Big(\left|4\xi^2 \sin(\xi)\right| + 4\left|\xi\cos(\xi)\right| + 3\left|\sin(\xi)\right| \Big) x^3 \\
&\leq \frac{1}{6}(4+4+3)x^3 = \frac{11}{6} x^3.
\end{aligned}$$

(c) Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
z \in M \quad &\Leftrightarrow \quad |z|^2 \leq 3 + 2\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 3 + 2b \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b \leq 3 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + (b-1)^2 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 \leq 4 \\
&\Leftrightarrow \quad |z - \mathrm{i}|^2 \leq 4 \Leftrightarrow |z - \mathrm{i}| \leq 2.
\end{aligned}$$

Also ist M die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt i (siehe Abbildung 1).

□

Aufgabe 3:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n stetig auf $(0, \infty)$. Deshalb gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(x - \frac{1}{n}\right)}{x\left(x + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\sin(x)}{x^2} =: f(x)$$

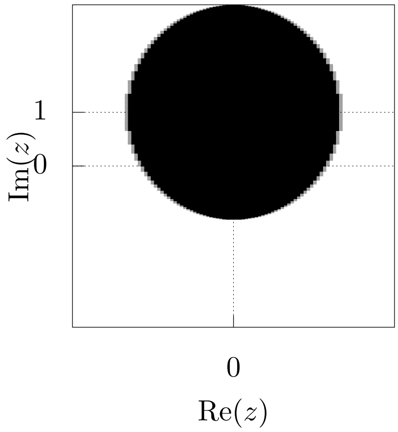

Abbildung 1: Menge M

für jedes $x \in (0,\infty)$. Also ist (f_n) punktweise konvergent gegen f.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die kleinste Nullstelle $x_n = \frac{1}{n} \in (0,\infty)$ von f_n. Es gilt

$$\|f - f_n\|_\infty \geq |f(x_n) - f_n(x_n)| = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Also ist (f_n) nicht gleichmäßig konvergent.

(b) (i) Substitution $y = \sqrt{x}$ führt auf

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x \overset{\substack{y=\sqrt{x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}}}{=} & \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{2y}{y(1+y^2)}\mathrm{d}y = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = 2\left[\arctan(y)\right]_{y=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \\ = \quad & 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

(ii) Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underbrace{x(x-1)}_{=g(x)}\underbrace{e^x}_{=f'(x)}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{P.I.}}{=} \left[x(x-1)e^x\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 (2x-1)e^x\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{(1-2x)}_{=g(x)}\underbrace{e^x}_{=f'(x)}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{P.I}}{=} \left[(1-2x)e^x\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 (-2)e^x\mathrm{d}x = -e - 1 + 2\left[e^x\right]_{x=0}^{1} \\ &= e - 3.\end{aligned}$$

(iii) Partielle Integration führt zunächst auf

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{=g(x)}\underbrace{\cos(x)\sin(x)}_{=f'(x)}\,\mathrm{d}x \overset{\text{P.I}}{=} \left[x\frac{(\sin(x))^2}{2}\right]_{x=0}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin(x))^2\mathrm{d}x.$$

Eine Stammfunktion von $x \mapsto (\sin(x))^2$ kann mit Hilfe des „*Phönix-aus-der-Asche-*

Tricks$^{\text{TM}}$" wie folgt berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\int (\sin(x))^2 \mathrm{d}x &= \int \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} \mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} -\cos(x)\sin(x) + \int (\cos(x))^2 \mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int \left[1 - (\sin(x))^2\right] \mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) + x - \int (\sin(x))^2 \mathrm{d}x \\
\Rightarrow \int \sin(x) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[x - \sin(x)\cos(x)\right]
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_0^\pi x\cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\sin(x)\cos(x) - x\right]_{x=0}^{\pi} = -\frac{\pi}{4}.$$

Alternativ führt das Additionstheorem $\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$ auf

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \underbrace{x}_{=g(x)} \underbrace{\sin(2x)}_{=f'(x)} \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{4}\left[x\cos(2x)\right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos(2x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\left[\sin(2x)\right]_{x=0}^{\pi} = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2n}\right)^2}} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2n}, \ldots, x_n = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $\left[0\frac{1}{2}\right]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Also ist der Grenzwert der Folge Riemannscher Zwischensummen

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \left[\arcsin(x)\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

Aufgabe 4:

(a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= xy^2 - x = x(y^2 - 1) \\
\rightsquigarrow \mathrm{d}y\frac{1}{y^2 - 1} &= x\mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\eta^2 - 1}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \xi \mathrm{d}\xi = \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Um eine Stammfunktion von $\eta \mapsto \frac{1}{\eta^2-1}$ auf $(-1,1)$ zu berechnen, beobachte die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\eta^2-1} = \frac{1}{(\eta-1)(\eta+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta+1}\right).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\eta^2-1}\mathrm{d}\eta &= \frac{1}{2}\left[\ln(1-\eta) - \ln(1+\eta)\right]_{\eta=y(0)}^{y(x)} = \frac{1}{2}\left(\ln(1-y(x)) - \ln(1+y(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y(x)}{1+y(x)}\right).\end{aligned}$$

Löse nun formal nach $y(x)$ auf

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y(x)}{1+y(x)}\right) &= \frac{x^2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1-y(x)}{1+y(x)} &= e^{x^2} \\ \Leftrightarrow 1-y(x) &= e^{x^2}(1+y(x)) \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{1-e^{x^2}}{1+e^{x^2}} = 1 - \frac{2}{1+e^{-x^2}}.\end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall I mit $0 \in I$, $y(x)^2 - 1 \neq 0$ für alle $x \in I$ und auf dem die obige Auflösung möglich ist. Offenbar ist $I = \mathbb{R}$.

(b) Beobachte zunächst, dass $\ln(x) < 0$ für jedes $x \in (0,1)$ und $\sin(x) > 0$ für $x \in (0,1) \subseteq (0,\pi)$. Folglich ist f auf $(0,1)$ negativ, hat also dort keine Nullstellen.

Es gilt $f(1) = -\sin(1) < 0$, sowie $f(e) = e\ln(e) - \sin(e) \geq e - 1 > 0$. Da f stetig ist, hat es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $x^* \in (1,e)$.

Schließlich ist f differenzierbar auf $(0,\infty)$ und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \frac{x}{x} + \ln(x) - \cos(x) = \underbrace{1-\cos(x)}_{\geq 0} + \underbrace{\ln(x)}_{>0} > 0$$

für alle $x \in (1,\infty)$. Also ist f auf $[1,\infty)$ streng monoton wachsend, kann also dort höchstens eine Nullstelle haben.