Institut für Analysis
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

WS2017/18
27.01.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1: (6 + (2 + 2) = 10 Punkte)

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe

$$s_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$$

mit $p \in \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \sqrt[n]{3^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^{n-k}}}$,

(ii) $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 2: (2 + 2 + (2 + 4) = 10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = \sqrt{3}i - 1$.

(b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\frac{(1+4i)^3}{1-i} - \exp(-1 + i\pi)(4i - 2)$.

(c) Skizzieren Sie die Mengen im $\mathbb{C}$

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} | \max\{2|\mathrm{Re}(z) + 1|, |\mathrm{Im}(z) - 1|^2\} < 3\}$.

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} | \max\{2|\mathrm{Re}(z) - 1|, |\mathrm{Im}(z)|^2\} = \max\{2|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z) - 3|^2\}\}$.

Aufgabe 3: (6 + 2 + 2 = 10 Punkte) Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ und $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\forall 1 \leq p \leq \infty : \|\cdot\|_p$ ist eine Norm.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^d \forall 1 < p < \infty : \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.

(c) Sei $1 \leq p < q \leq \infty$, dann existieren Konstanten C_1 und C_2, $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, so, dass

$$C_1 \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C_2 \|x\|_p \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \,.$$

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 4: (4 + 3 + 3 = 10 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \arctan\left(x^3\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ x + \ln(1-x) & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $f'(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

(b) Sei $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sqrt{|x-3| + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x)}\,.$$

Begründen Sie, warum die Funktion f Maximum und Minimum annehmen und berechnen Sie diese.

(c) Berechnen Sie die Ableitung von die folgende $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}$ $\forall x \in (-0.5, 0.5)$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können innerhalb letzte Woche den **05.-09.002.2018** im Tutorien abgeholt werden.
Fragen zur Korrektur (Scheinklausur) werden ausschließlich am Freitag, den **09.02.2018**, von **15:40** bis **16:00** im Zimmer (Zimmer 2.030, Gebäude 20.30) beantwortet.