KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
02.02.2019

HÖHERE MATHEMATIK I FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

ÜBUNGSKLAUSUR

AUFGABE 1 (3+3+4=10 PUNKTE)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (x+1)^n}{\sqrt{n}}.$$

AUFGABE 2 ((2+3)+3+2=10 PUNKTE)

a) (i) Zeigen Sie, dass $|\cos(x) - 1| \leqslant \frac{x^2}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}(\cos(x^{-\alpha/2}) - 1)^2 & , x > 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

b) Zeigen Sie, dass

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan(x) < \frac{x - \frac{x^3}{3}}{1 - x^4}$$

für alle $0 < x < 1$.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{\pi}{2} \log(x) = \sin(x)$ genau eine Lösung für $x > 0$ besitzt.

Aufgabe 3 ((2+3)+(3+2) = 10 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (\sqrt{2}\sin(x))^n,$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in denen die Folge $(f_n(x))$ konvergiert. Geben Sie die punktweise Grenzfunktion f an.

(ii) Untersuchen Sie die Folge (f_n) auf gleichmäßige Konvergenz in den Intervallen $[0, \frac{1}{2}]$ und $[0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

(i) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan(x)^{\tan(2x)}$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 4 ((3+2)+(2+3)=10 Punkte)

a) Untersuchen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\log(x))^\alpha}\, dx$$

auf Konvergenz und berechnen Sie es gegebenenfalls.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \sinh(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y'(x) = x^3(1+y^2), \quad y(0) = 0.$

(ii) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 9.$

Viel Erfolg!