Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
02.02.2019

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn wenn möglich.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (x+1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen vollständige Induktion.
Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},\end{aligned}$$

was die Behauptung für $n+1$ ist.

b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$e \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e \cdot 1 = e$$

Der Grenzwert der n-ten Wurzel ist dabei deshalb 1, weil $2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant 3$ nach Vorlesung als Teilfolge der Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ sowie $\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{3} \to 1$ für $n \to \infty$. Nun folgt die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = e$$

nach Vorlesung.

c) Für den Konvergenzradius berechnen wir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-3)^n}{\sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = 3,$$

sodass der Radius durch $\frac{1}{3}$ gegeben ist. Somit konvergiert die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt -1 für $x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ und divergiert für $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$. Für $x = -\frac{4}{3}$ hat die Potenzreihe die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

und divergiert somit nach Vorlesung/Übung. Für $x = -\frac{2}{3}$ hat die Potenzreihe die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

und konvergiert nach dem Leibnitzkriterium, da $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Somit konvergiert die Potenzreihe genau für $x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$

Aufgabe 2 ((2+3)+3+2=10 Punkte)

a) (i) Zeigen Sie, dass $|\cos(x) - 1| \leqslant \frac{x^2}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha (\cos(x^{-\alpha/2}) - 1)^2 & , x > 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

b) Zeigen Sie, dass

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan(x) < \frac{x - \frac{x^3}{3}}{1 - x^4}$$

für alle $0 < x < 1$.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{\pi}{2}\log(x) = \sin(x)$ genau eine Lösung für $x > 0$ besitzt.

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösungsvorschlag

a) (i) Nach dem Satz von Taylor gilt für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(x) = \cos(0) + \frac{\sin(0)}{1!}(x-0) + \frac{-\cos(\xi)}{2!}(x-0)^2 = 1 - \cos(\xi)\cdot\frac{x^2}{2}$$

für ein ξ zwischen 0 und x. Somit folgt

$$|\cos(x) - 1| = |\cos(\xi)|\cdot\frac{x^2}{2} \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

(ii) In $x > 0$ ist f stetig als Komposition stetiger Funktionen. Es bleibt $x = 0$ zu untersuchen, wofür wir eine Fallunterscheidung vornehmen.
<u>1. Fall:</u> $\alpha < 0$. Für $x > 0$ gilt mit (i), dass

$$|f(x) - f(0)| = x^\alpha\,|\cos(x^{-\alpha/2}) - 1|^2 \leqslant x^\alpha\cdot\frac{x^{-2\alpha}}{2} = \frac{x^{-\alpha}}{2} \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

da $-\alpha > 0$, womit f in 0 stetig ist.
<u>2. Fall:</u> $\alpha = 0$. Für $x > 0$ gilt, dass

$$|f(x) - f(0)| = (\cos(1) - 1)^2 \neq 0,$$

womit f nicht stetig in 0 ist.
<u>3. Fall:</u> $\alpha > 0$. Für $x > 0$ gilt, dass

$$|f(x) - f(0)| = |x|^\alpha\,|\cos(x^{-\alpha/2}) - 1|^2 \leqslant x^\alpha(|\cos(x^{-\alpha/2})| + 1)^2 \leqslant 4x^\alpha \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

womit f stetig in 0 ist.

b) Die Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \arctan(x), \qquad g(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

sind stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $g'(x) = 1 - x^2$. Außerdem hat g' keine Nullstelle und $g(x) \neq g(0) = 0$ für alle $x \in (0,1)$, denn

$$x - \frac{x^3}{3} = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm\sqrt{3}\}.$$

Somit folgt mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass für alle $x \in (0,1)$ ein $\xi \in (0,x)$ existiert mit

$$\frac{\arctan(x)}{x - \frac{x^3}{3}} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{1}{1+\xi^2}}{1-\xi^2} = \frac{1}{1-\xi^4}.$$

Der letzte Ausdruck lässt sich strikt nach unten durch 1 und nach oben durch $\frac{1}{1-x^2}$ abschätzen. Durch Multiplizieren mit $x - \frac{x^3}{3}$ $(= x(1-\frac{x^2}{3}) > 0$ für $0 < x < 1)$ folgt die Behauptung.

c) Eine Lösung der Gleichung ist eine Nullstelle der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2}\log(x) - \sin(x)$. Es gilt $f(1) = -\sin(1) < 0$ und $f(\pi) = \frac{\pi}{2}\log(\pi) > 0$, womit f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $(1,\pi)$ besitzt.
Nun gilt einerseits, dass für $x > \mathrm{e}$

$$|f(x)| \geqslant ||\log(x)| - |\sin(x)|| \geqslant \log(x) - 1 > 0.$$

Mit $f'(x) = \frac{\pi}{2x} - \cos(x)$ reicht es nun zu zeigen, dass $f'(x) > 0$ für $x \in (0,\mathrm{e})$, da so f strikt monoton wachsend ist und deshalb in diesem Intervall nur eine Nullstelle haben kann. Für $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ gilt wegen $\frac{\pi}{2x} > 1$ und $\cos(x) \leqslant 1$

$$f'(x) > 1 - \cos(x) \geqslant 0,$$

für $x \in [\frac{\pi}{2},\mathrm{e}]$ wegen $\cos(x) \leqslant 0$

$$f'(x) \geqslant \frac{\pi}{2x} > 0,$$

also folgt die Behauptung.

Aufgabe 3 ((2+3)+(3+2) = 10 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (\sqrt{2}\sin(x))^n,$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie alle $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, in denen die Folge $(f_n(x))$ konvergiert. Geben Sie die punktweise Grenzfunktion f an.

(ii) Untersuchen Sie die Folge (f_n) auf gleichmäßige Konvergenz in den Intervallen $[0,\frac{1}{2}]$ und $[0,\frac{\pi}{4}]$.

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

(i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(x)^{\tan(2x)}$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Wegen $\sin' = \cos$ ist der Sinus monoton wachsend auf $[-\pi/2,\pi/2]$ und streng monoton wachsend auf $(-\pi/2,\pi/2)$. Aus $\sin(-\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt also, dass $|\sqrt{2}\sin(x)| < 1$ für $|x| < \pi/4$ und $|\sqrt{2}\sin(x)| > 1$ für $|x| > \pi/4$. Demnach gilt die folgende Fallunterscheidung.
<u>1. Fall:</u> $|x| < \pi/4$. Wegen $|\sqrt{2}\sin(x)| < 1$ gilt $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$.
<u>2. Fall:</u> $x = -\pi/4$. Wegen $\sqrt{2}\sin(-\pi/4) = -1$ gilt $f_n(x) = (-1)^n$, was keine konvergente Folge ist.
<u>3. Fall:</u> $x = \pi/4$. Wegen $\sqrt{2}\sin(\pi/4) = 1$ gilt $f_n(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
<u>4. Fall:</u> $\pi/2 \geqslant |x| > \pi/4$. Wegen $|\sqrt{2}\sin(x)| > 1$ gilt $|f_n(x)| \to \infty$ für $n \to \infty$, die Folge $(f_n(x))$ divergiert also.

Insgesamt konvergiert $(f_n(x))$ genau dann, wenn $x \in (-\pi/4, \pi/4]$ und die punktweise Grenzfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\pi/4, \pi/4), \\ 1 & , x = \pi/4. \end{cases}$$

(ii) Als Grenzfunktion für die gleichmäßige Konvergenz kommt nur die punktweise Grenzfunktion aus (i) in Frage. Für $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt{2}\sin(x)|^n \leqslant (\sqrt{2}\sin(1/2))^n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

wegen der strengen Monotonie des Sinus und $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$. Nach einer Aussage der Vorlesung beweist diese von x unabhängige Abschätzung gegen eine Nullfolge die gleichmäßige Konvergenz.
Auf $[0, \pi/4]$ kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein, da die Funktionen f_n auf diesem Intervall stetig sind, die Grenzfunktion f jedoch nicht.

b) (i) Wir nutzen zunächst die Definition der allgemeinen Potenz, um zu sehen, dass für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\tan(x)^{\tan(2x)} = \mathrm{e}^{\log(\tan(x))\tan(2x)}.$$

Konvergiert nun der Exponent, so können wir aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion die Konvergenz des ursprünglichen Ausdrucks folgern. Da $\log(\tan(x))$ und $\frac{1}{\tan(2x)}$ gegen 0 konvergieren für $x \to \frac{\pi}{4}$, folgt nach der Regel von L'Hospital, dass

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \log(\tan(x))\tan(2x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\tan(x))}{(\tan(2x))^{-1}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan(x))^{-1}\cdot(\cos(x))^{-2}}{-(\tan(2x))^{-2}\cdot(\cos(2x))^{-2}\cdot 2} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{\sin(2x)}{2\sin(x)\cos(x)} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -1. \end{aligned}$$

Somit folgt schließlich

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(x)^{\tan(2x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\log(\tan(x))\tan(2x)} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

(ii) Da für $x \to \infty$ sowohl $\log(1+\mathrm{e}^x)$ als auch $\sqrt{1+x^2}$ gegen ∞ streben, folgt mit der Regel von L'Hospital und kürzen von x und e^x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^x}{x(1+\mathrm{e}^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{(1+\mathrm{e}^{-x})} = 1.$$

Alternativ lässt sich auch im Anfangsterm e^x im Zähler bzw. x im Nenner ausklammern, um mit den Rechenregeln des Logarithmus und der Wurzel den Grenzwert zu erhalten

$(x>0)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x}))}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{e}^x)+\log(1+\mathrm{e}^{-x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\log(1+\mathrm{e}^{-x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}\log(1+\mathrm{e}^{-x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

Aufgabe 4 ((3+2)+(2+3)=10 Punkte)

a) Untersuchen Sie für $\alpha\in\mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$$

auf Konvergenz und berechnen Sie es gegebenenfalls.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi}\sinh(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y'(x)=x^3(1+y^2),\quad y(0)=0.$

(ii) $y''(x)-6y'(x)+9y(x)=\mathrm{e}^{2x},\quad y(0)=4,\ y'(0)=9.$

Lösungsvorschlag

a) Sei $R>\mathrm{e}$, dann gilt mit der Substituion $y=\log(x)$ ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$), dass

$$\int_{\mathrm{e}}^{R}\frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\,\mathrm{d}x=\int_{\log(\mathrm{e})=1}^{\log(R)}\frac{1}{y^{\alpha}}\,\mathrm{d}y$$

Dieses Integral konvergiert für $R\to\infty$ laut Vorlesung genau für $\alpha>1$. In diesem Fall gilt

$$\int_{\log(\mathrm{e})=1}^{\log(R)}\frac{1}{y^{\alpha}}\,\mathrm{d}y=\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{y=1}^{y=\log(R)}=\frac{(\log(R))^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\xrightarrow{R\to\infty}\frac{1}{\alpha-1}.$$

Somit konvergiert das Ausgangsintegral genau für $\alpha>1$ und es gilt

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{e}}^{R}\frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_1^{\log(R)}\frac{1}{y^{\alpha}}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\alpha-1}.$$

b) Wir verwenden zwei Mal partielle Integration, um zu sehen, dass

$$\int_0^\pi \underbrace{\sinh(2x)}_{u}\underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{v'} \,\mathrm{d}x = 2\sinh(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} - 4\int_0^\pi \underbrace{\cosh(2x)}_{u}\underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{v'} \,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sinh(2\pi) + 8\cosh(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} - 16\int_0^\pi \sinh(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sinh(2\pi) - 8 - 16\int_0^\pi \sinh(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \,\mathrm{d}x.$$

Bringen wir das letzte Integral auf die linke Seite und dividieren durch 17, erhalten wir

$$\int_0^\pi \sinh(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \,\mathrm{d}x = \frac{2\sinh(2\pi) - 8}{17}.$$

c) (i) Die Funktionen, die durch $f(x) = x^3$ bzw. $g(y) = 1 + y^2$ definiert sind, sind auf $\mathbb{R}$ stetig und g ist nullstellenfrei. Wir schreiben $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und Trennen die Variabeln, somit ergibt sich

$$\frac{1}{1+y^2} \,\mathrm{d}y = 3\sqrt{x} \,\mathrm{d}x.$$

Integration ergibt

$$\arctan(y) = \int_0^y \frac{1}{1+s^2} \,\mathrm{d}s = \int_0^x x^3 \,\mathrm{d}s = \frac{x^4}{4}.$$

Schließlich ergibt sich durch Auflösen

$$y(x) = \tan(\frac{x^4}{4}).$$

Das größte Intervall, das die 0 enthält und auf dem der Tangens definiert ist, ist $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und es folgt wegen

$$\frac{x^4}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x^4 \in (-2\pi, 2\pi) \Leftrightarrow x \in (-\sqrt[4]{2\pi}, \sqrt[4]{2\pi}),$$

dass das maximale Existenzintervall durch $(-\sqrt[4]{2\pi}, \sqrt[4]{2\pi})$ gegeben ist.

(ii) Es handelt sich um eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom P der Gleichung ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

womit eine zweifache Nullstelle in 3 vorliegt. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist demnach

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} + c_2 x \mathrm{e}^{3x}.$$

Für die spezielle Lösung wählen wir den Ansatz $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$, da 2 keine Nullstelle von P ist. Es folgt

$$y_p'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}, \qquad y_p''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x},$$

und somit gilt, wenn wir dies in die Ausgangsgleichung einsetzen, dass

$$y_p''(x) - 6y_p'(x) + 9y_p(x) = Ae^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x},$$

womit $A = 1$ folgt. Für die allgemeine Lösung gilt nun

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + e^{2x}.$$

Nun bestimmen wir noch c_1 und c_2 über die Anfangswerte. Es gilt

$$4 \stackrel{!}{=} y(0) = c_1 + 1 \Leftrightarrow c_1 = 3.$$

Außerdem gilt

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} + 2e^{2x},$$

also

$$9 \stackrel{!}{=} y'(0) = 3c_1 + c_2 + 2 \Leftrightarrow c_2 = 7 - 3c_1 = 7 - 9 = -2.$$

Somit lautet die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = 3e^{3x} - 2xe^{3x} + e^{2x}.$$