Probeklausur
Höhere Mathematik 1 für die Fachrichtung Physik
28. Januar 2020

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Tutoriumsnummer: ____________________

- Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums auf jedes Blatt.
- Es gibt 3 Aufgaben. Je Aufgabe können 10 Punkte erzielt werden, insgesamt also 30 Punkte.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Außer der Formelsammlung, die der Probeklausur beiliegt, sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder einem roten Stift.

A1	A2	A3	Summe	Note

Aufgabe 1 (3+1+3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{m} (k+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j).$$

b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-5)^k}{6^k}.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n}.$$

d) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge (a_n) gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (4+3+3 Punkte)

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t \cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1],$$

gegeben. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. *Hinweis:* partielle Integration.

b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f''(t) \geq 0$ für alle $t \in I$. Seien $a, b, x \in I$ und es gelte $a < b$ sowie $x \in (a,b)$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \pi/2} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \pi/2}\right).$$

Aufgabe 3 (2+2+3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$ (ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \sin(x) \frac{1 - y(x)^2}{2y(x)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$